

線形システムとしての林分の生長

箕輪光博*

§ 1 はじめに

近年、自律形成とか自己体制化 (self-organization) という言葉を耳にするようになった。Haken (4) によれば、自己体制化とは、あるシステムが、外部から加えられた力 (外力) を自己のシステム内に取り込み内在化させて行く過程である。たとえば、ある力学系に対して、外力 $F(t)$ が加わると、システムを表現する式は

$$\frac{dx}{dt} = -ax + F(t) \quad (a > 0) \quad (1)$$

となるが、この $F(t)$ を別の微分方程式

$$\frac{dF}{dt} = bF + c \cdot F \quad (2)$$

で表わすことにより、二次元のシステムという形で外力を「内在化」させるのだという。これは実に興味ある考え方であり、システムが外力圧を次々と包摂して次元を高くしていく過程や他のシステムを併合して行く過程を説明する一つの手がかりになると思われる。

ところで、筆者はここ数年、林分因子相互の生長関係を一つのシステムとみる立場から、自己間引 (self-thinning) 林分についての生長解析を進めてきた。self-thinning という概念は上述の self-organization と必ずしも同じ概念ではないが、システム論的には両概念の間に Bertalanffy (1) のいう「論理的相同」や「同形性」がみられる。

そこで、本報ではまず、システムの自己体制化という観点から、自己間引林分の生長モデルと間伐林分の生長モデルとの論理的関係を述べる。ついで、本システムモデルと関係のある竹内 (33)、Pienaarら (27)、阪上 (29)、西沢ら (25)、森田 (16)、南雲ら (19)、鈴木 (32)、篠崎ら (31)、Garcia (2) らのモデルをとりあげ、システムモデルとしての得失を論ずる。

なお、私信を通じて多くの示唆と文献を提供していただいた宇都宮大学の内藤健司講師、東京大学の白石則彦氏、国立林試九州支場の森田栄一氏、ニュージーランド国立林試 (FRI) の Garcia, O 氏の諸氏に深く感謝する次第である。

2 自己間引林分の生長モデル

林分の本数密度は、時間の経過とともに減少していく。特に林分閉鎖後の密度減少は主として種内競争に起因しており、通常自己間引 (Self-thinning) と呼ばれている (35)。この自己間引は、森林の自己調節過程の典型的な例である。最近、この自己間引林分の生長に関して、自然間引の $3/2$ 乗則

* 三重大学農学部

(34) を出発点とする理論的研究が、穂積 (6, 7), 筆者 (13, 14, 15), 内藤 (20, 21, 22), 原 (5) らによって進められつつある。研究の中心テーマは、減少する個体密度と増大する個体の大きさとの関連を定量的に明らかにすることにあり、基礎となる生長曲線として Logistic 曲線(穂積), Richards 関数(内藤), Gompertz 曲線(原, 筆者)などが用いられている。筆者と原の生長モデルは、発想の経緯や導き方に多少の相違はあるが、帰着したところは、同じ対数線形の連立微分方程式系である。筆者は、従来の Mitscherlich 曲線との対比を鮮明にするために、これを Log - Mitscherlich 系(略して Log - M 式系)と呼んでいる。その一例を示すと、

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11} x_1 \quad (3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \quad (4)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \quad (5)$$

となる(15)。ここで、平均高、本数密度、平均直径をとれぞれ、 H, N, D とするとき、

$$x_1 = \ln(H_*/H), \quad H_* = \lim_{t \rightarrow \infty} H(t)$$

$$x_2 = \ln(N/N_*), \quad N_* = \lim N(t)$$

$$x_3 = \ln(D_*/D), \quad D_* = \lim D(t)$$

である。

x_1, x_2, x_3 は、常に正でかつ時間とともにゼロに収束(減衰)するように、 H, N, D の収束値 H_*, N_*, D_* をもとに基準化された量である。したがって、対角線上に並ぶパラメータ a_{11}, a_{22}, a_{33} はすべて負である。以上をまとめてかくと、

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{A} x \quad (6)$$

となる。ただし、 $x = (x_1, x_2, x_3)$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

である。

次に、三角行列 \mathbf{A} の意味を考えよう。まず、(3)式から分かるように、 x_1 は単独に指数型の微分方程式に従い、その解は

$$x_1 = x_{10} \exp[a_{11}(t - t_0)] \quad (7)$$

となる。これは、元の変数 H に変換すると、

$$\ln H = \ln H_* \{1 - L \cdot \exp[a_{11}(t - t_0)]\} \quad (8)$$

となるので、平均高 H の対数は、Mitscherlich式に従うことが分かる。ただし、初期値関係は

$$\begin{cases} x_{10} = x(t_0) = \ln(H_*/H_0) \\ H_0 = H(t_0) \end{cases}$$

$$L = x_{10} / \ln H_*$$

である。また、(8)式は、Gompertz曲線

$$H = H_* \left(\frac{H_0}{H_*} \right)^{\exp [a_{11} (t - t_0)]} \quad (9)$$

の形に書くこともできる。

このように、平均高 H は単独に指数型の微分方程式に従うわけであるが、これはあくまでも収束値 H_* が他の因子の影響を受けないとした場合の話である。もし、 H_* が N や D の関数であるなら、(3)式から

$$\begin{aligned} \frac{d \ln H}{dt} &= \ln H_* - a_{11} (\ln H_* - \ln H) \\ &= \ln H_* (1 - a_{11}) + a_{11} \ln H \end{aligned}$$

であるので、パラメータ項に N や D が入り、 N や D の「フィードバック」を配慮せねばならなくなる。たとえば、 $H_* = \alpha \cdot N^\beta$ とすると、

$$\frac{d \ln H}{dt} = \ln \alpha + \beta \cdot \ln N (1 - a_{11}) + a_{11} \ln H$$

となる。これは、 x_1 、 x_2 で表わすと

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11} x_1 + a_{12} x_2$$

となり、 A は三角行列から

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix} \quad (* \text{印は非ゼロ要素})$$

の形に移行する。

以上の説明から、 H_* 、 D_* 、 N_* などの非同次項を、ベキ関係を介して他の因子に関係づけると、行列 A の*要素が増えていくことがわかる。そこで再び、三角行列の場合に戻って、(3)式と(4)の関係について考えよう。(4)式を x_2 のみの微分方程式とみたとき、 $a_{21} x_1$ は非同次項である。つまり、この非同次項は x_1 に比例して変化する。ところで、(7)式より $x_1 = x_{10} \exp [a_{11} (t - t_0)]$ であるから、(4)式は、

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{22} x_2 + b \cdot \exp [a_{11} (t - t_0)] \quad (10)$$

となる。ただし、 $b = a_{21} \cdot x_{10}$ である。

$a_{11} < 0$ 、 $a_{22} < 0$ であるので、(10)式は x_2 の変化率が状態変数 x_2 自身に比例して減少する部分と直接時間 t に依存して指数減少する部分の和で表わされることを示している。 x_2 を元の変数 N に戻すと

$$\frac{d \ln N}{dt} = \frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt}$$

$$= a_{22} (\ln N_* - \ln N) + b \cdot \exp [a_{11} (t - t_0)]$$

であるから、本数密度 N の相対変化率はそれ自身 N に依存する部分と直接時間に依存する部分の和から成っていることがわかる。さらに、(10)式の指数関数項を $F(t)$ とおくと、

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{22} x_2 + F(t) \quad (11)$$

となり、形式的に(1)式と一致する。したがって、この $F(t)$ を一種の外力とみなすことができる。換言すれば、平均高 H が $F(t)$ という形をとって本数密度 N に作用しているわけである。

さて、(11)式は一般に非自律系 (28) の微分方程式と呼ばれており、 $F(t)$ = 一定の自律系の場合よりは複雑である。すなわち、 $F(t)$ = 一定の自律系の場合には、(11)式は Mitscherlich 型の微分方程式となり、その解は Khilmi (35) の自己間引曲線

$$\ln N = A + B \cdot \exp [a_{22}(t - t_0)] \quad (A, B \text{ は正の定数}) \quad (12)$$

あるいは

$$N = N_* \left(\frac{N_0}{N_*} \right)^{\exp [a_{22} (t - t_0)]}$$

に一致する。ただし、 $N_0 = N(t_0)$ 、 $N_* = \lim_{t \rightarrow \infty} N(t)$ である。これに対して、本節の例のように、外力 $F(t)$ が、

$$F(t) = b \cdot \exp [a_{11} (t - t_0)]$$

なる単純な指数関数に従う場合には、解曲線 x_2 は二つの指数関数の重ね合わせとなるので、本数密度 N も

$$\ln N = A' + B' \exp [a_{11} (t - t_0)] + C' \exp [a_{22} (t - t_0)] \quad (13)$$

と表わされる。なお、 $\ln N$ の解が二つの指数関数の重ね合わせになること、換言すれば N が二つの Gompertz 曲線の積になることについては、筆者はすでに線形代数の観点から組織的に扱っているので文献 (14, 15) を参照されたい。

以上、(13)式と(14)式を連立させると、 $\ln N$ は非自律系の特殊な場合に帰着し、その解は(13)式で表わされることがわかった。(13)式は(12)式つまり Khilmi 式の拡張になっている。次に、同様の論理を(3)式と(5)式に適用すると、

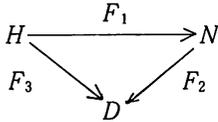
$$\frac{dx_3}{dt} = a_{31} \cdot x_{10} \exp [a_{11} (t - t_0)] + a_{32} x_2 + a_{33} x_3$$

となり、やはり非同次項に指数関数を含む特殊な非自律系の例が得られる。これを元の変数 D (平均直径) で表わすと、 $x_3 = \ln (D_*/D)$ であるから、

$$\frac{d \ln D}{dt} = \frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{dt}$$

$$= \alpha + \beta \exp [a_{11} (t - t_0)] + r \cdot \ln N + a_{33} \ln D \quad (14)$$

となる。ただし、 α 、 β 、 r は定数である。これは、平均直径 D の相対生長率が、時間に直接依存する部分と状態変数 N と D に依る部分から成ることを示している。換言すれば、平均高 H が指数関数という形を介して、 D の生長に影響を与えているわけである。さらに、本数密度 N も H とともに D の生長に関係している。そもそも行列 A が三角行列であるという意味は、 H が N に作用し、さらに H と N が一緒になって D に働くということである。模式的に示せば、



となる。ここで、 F_1 と F_3 は、それぞれ(8)式の定数倍として定まる(働き先 N と H に応じて)外力である。また F_2 は(13)式の定数倍として定まる D に対する外力である。したがって、 D に対する外力は、

$$F(t) = F_2(t) + F_3(t)$$

となり、この $F(t)$ を用いると、平均直径 D に関する微分方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{dx_3}{dt} &= a_{33} x_3 + F_2(t) + F_3(t) \\ &= a_{33} x_3 + F(t) \end{aligned} \quad (15)$$

となる。これはやはり(1)式と同じ非自律系の微分方程式である。

以上、三次元 log-M 式系の特殊な場合、すなわち行列 A が三角行列の場合の例にとり、 N と D の方程式が単独の非自律系に帰着できることを示した。それでは逆に、(11)式と(15)式から H 、 N 、 D に関する三次元システムを構成できるであろうか。明らかに、各外力 $F_1(t)$ 、 $F_2(t)$ 、 $F_3(t)$ を H 、 N 、 D の関数として表わすことができればそれは可能である。このように、外力を他の状態変数の関数とすることは、まさしく Haken のいう「外力の内在化」の論理そのものである。たとえば、(11)式で、

$$F(t) = \alpha' \cdot H^{\beta'} = a_{21} x_1 \quad (16)$$

とおけば、平均高 H は内在化されて、 N とともに二次システムを構成する。これが(3)式と(4)の関係である。次に、(15)式で

$$F(t) = \alpha' \cdot H^{\beta'} N^{\gamma'} = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 \quad (17)$$

とおけば、 H と N は内在化されて D とともに三次元システムを構成する。この手続きは論理的には無限に続けることができる。換言すれば、(16)式や(17)式のごときベキ乗関係で結ばれている林分因子は、いつでも log-M 式系の一員になる資格を有し、同時にシステムの次元を引き上げる役割をはたしている。たとえば、相対幹距 S_r は

$$S_r = \frac{100}{H\sqrt{N}}$$

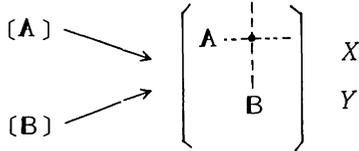
と定義されるが、新たに $x_4 = \ln(S_r/S_{r*})$ なる変数を導入すると、前述の x_1 と x_2 を用いて

$$x_4 = x_1 - \frac{1}{2} x_2$$

と表わされるので、 x_i はlog-M式系の新しい状態変数となる。一般的に言えば、ある一群の林分因子が行列Aで表現されるlog-M式系に従い、他方別の一群が行列Bで表現されるlog-M式系に従うとし、両者のある林分因子の間に、たとえば

$$Y = p \cdot X^q \quad (p, q \text{ はパラメータ})$$

なるべき関係を想定すれば、二つのlog-M式系は統合されて高次のシステムに移行する。このことを模式的に示せば、



となる。天然林や複層林の生長を扱う一つの方法として、樹種別あるいは林冠層別にシステムを記述し然る後統合するやり方が考えられる。Moser (18) や Leary (12) の論文の中にその一例がみられる。

さて、これまでに述べてきたlog-M式系は自己間引林分の生長モデルである。しかし、収穫表のH, N, D関係を調べてみると、log-M式系の特別な場合に帰着できる収穫表が多い(15, 26)。特に、秋田地方スギ林分収穫表(26)のように、調製の際に

$$\begin{aligned} H &= aD^b \\ N &= a'D^{-b'} \end{aligned} \quad (a, b, a', b' \text{ はパラメータ}) \quad (18)$$

なるべき関係を仮定している場合には、行列Aが対角行列でしかも対角要素($a_{ii}, i=1, 2, 3$)がすべて等しいという最も単純なlog-M式系でH, N, Dの時間的変化を記述できる(15)。なお、行列Aの形と(18)式のごとき「軌道」(トラジェクトリ)との関係については、文献(15)を参照されたい。したがって、一定の方針の下に一定の立木度を保って施業がなされている現実の林分に対しても、log-M式系を十分適用できるものと思われる。そこで次に、自己間引林分の生長と間伐林分の生長を、log-M式系を土台に、Hakenのいう「自己体制化」という観点から考えてみたい。

§ 3 間伐林分の生長モデル

間伐は人為による間引であるからまさしく自己間引の対極にある概念である。この間引を一種の外力とみなせば、間伐後の生長を(14)式または(15)式で表わすことができる。(15)式中の外力 F_3 は(14)式中の指数関数 $\exp[a_{11}(t-t_0)]$ に比例する項であり、また F_2 は(14)式中の $\ln N$ に比例する項なので、ここであらためて、

$$\left. \begin{aligned} F_1(t) &= \beta \exp[a_{11}(t-t_0)] \\ F_2(t) &= r \cdot \ln N \\ X &= \ln D \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

とおくと、(14)式は

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{dt}$$

$$= \alpha + F_1(t) + F_2(t) + a_{33} \cdot X \quad (20)$$

となる。ここで、外力 F_1 は(3)式を介して指数関数として内在化されている量で、間伐とは関係のない H の D に対する作用項である。他方 F_2 は、 N の D に対する作用項で、間伐後の林分密度 $\ln N$ に比例する。したがって、 F_2 は間伐の度に離散的に変化し、一定値にとどまるのは間伐後の一定期間のみである。つまり、(20)式は $F_2 = \text{一定}$ という条件の下での間伐後の生長を記述する生長モデルといえる。ここで、 $F_2 = \text{一定}$ ($N = \text{一定}$) という点が大切であり、自己間引モデルと間伐モデルを区別する岐れ目である。なぜなら、もし F_2 が(4)式や(10)式のような微分方程式で記述できるとすると、前節の自己間引生長論に回帰してしまうからである。つまり、本数密度 N は内在化されて $\log - M$ 式系内に取込まれてしまう。これに対して、 F_2 があくまでも林分の密度制御手段としてシステムの外部にある限り、 F_2 を微分方程式等で表現することは不可能であり、 N が完全に内在化されることはない。これが間伐のシステム論的表現であり、同時に制御手段としての本数密度 N が人間の側にあることの数学的表現である。

ところで、 $N = \text{一定}$ ということは、前節の三次元 $\log - M$ 式系において

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt} = 0$$

であることを意味するので、システムは、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11} x_1 \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{31} x_1 + a_{33} x_3 + F_2 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

なる二次元システムに退化している。この場合のシステムの行列は

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

である。このように、間伐後の生長モデルは、本数密度 N の変化を無視する分だけシステムとしては単純になる。逆に、 N がこの二次元システム内に取込まれると、次元は一つ上がり三次元の自己間引システムが生成される。この関係は、Haken (4) のいう「体制化 (organization)」と「自己体制化 (self-organization)」の關係に類似している。彼は体制化と自己体制化の相違を次のように述べている。

ア) 体制化

たとえば一群の労働者を考えよう。この場合組織化とか、より正確には組織だった行為とかいうのは、おのおのの労働者が外から、つまり監督から指示された、はっきり定められた方法で行動するときである。このように規制された行為が連合してなんらかの生産をすると理解される。

イ) 自己体制化

いま同様の過程が、外からの命令がなく、労働者たちがある種の相互理解によって共同し、なんらかの製品をつくるために各人が自分の職分を果していくというように進むとき、これを自己体制化

(自律形成) とよぼう。

さて、*a*) の場合は外力を与えられた固定した量として扱う。微分方程式の形で表現すると(1)式のようになり、外力 $F(t)$ は非同次項の中にあられる。他方 *b*) の場合は外力 $F(t)$ 自体が方程式(2)に従うものとして扱う。このアナロジーに従えば、本節の間伐モデルは外力 N を外から与えられたものとして受けとめる *a*) のケースに、他方前節の自己間引モデルは N 自体を(4)式や(3)式の形で記述する *b*) のケースに相当するものと考えられる。間伐は林内の物質とエネルギーの配分、流れを一時的に攪乱する行為であるが、大規模に林冠を疎開しない限り、林分は数年後に一定の閉鎖状態に戻っていく。この間伐後の林分の回帰過程を記述するのが(2)式の二次元システムである。つまり、平均高 H と平均直径 D はそれぞれ二次元システムの要素として相互に関連しながら動いていく。

以上は「間伐直後から次の間伐直前」までの林分の生長について述べたものである。これに対して、通常の収穫表は一定年度ごとに間伐直前あるいは間伐直後の林分の状態を記述している。本節の間伐モデルが「間伐内」を対象とするのに対し、収穫表(一つの生長モデル)は「間伐間」を対象とする。間伐林分の生長モデルは常にこの二つの側面を備えているが、「内と間」を明確に区別しておく必要がある。たとえば、ある収穫表(間伐は5年ごと)に対して、五種類の間伐ケース

- イ) (20, 25, 30年, ……)
- ロ) (21, 26, 31年, ……)
- ハ) (22, 27, 32年, ……)
- ニ) (23, 28, 33年, ……)
- ホ) (24, 29, 34年, ……)

を仮想することができる。そして、このイ)~ホ)までのすべての間伐直前の H と D の値をプロットすると、1年ごとの H 曲線、 D 曲線が描かれる。収穫表には21, 22, 23, 24年時の H や D は記載されていないが、それを想定することは自由なので、結局時間 t に関して連続な曲線を思い描くことができる。ではこのようにして得られた H 、 D 曲線と間伐後の生長を記述する(2)式の二次元システムとは同一のものであろうか。これは否である。なぜなら、上記のように収穫表の林齢を無限にきざんで考えるということは、本数密度 N を時間の連続関数として扱うことになるので、すでに $F_2 = \text{一定}$ 、つまり $N = \text{一定}$ の二次元システムを越えているのである。これまでの論法でいえば、 N を $N(t)$ と考えた時点でシステムは次元上がり、三次元システムに向かっている。このように考えていくと、収穫表は、前節の自己間引モデル $\log - M$ 式系と本質的に同一の論理構造をもっていることがわかる。換言すれば、収穫表は外力としての本数密度 N を、形式的に $H - D$ 二次元システム内に「内在化」させたものといえよう。その点は、同じく N を基本変数にするにしても、密度管理図とは根本的に異なる。すなわち、密度管理図においては、 N はあくまでも外力であり、制御手段である。

すでに、前節のおわりのところで、 $\log - M$ 式系が既存の収穫表に適合することを指摘した。その理由は、形式的には、 H 、 N 、 D が(18)式のごとき関係を満たすことが多いということに求められるが、と同時に内容的に言えば、外力 N を内在化させるという論理が両者に共通しているからである。

すなわち、 N は

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

という形で、システム (x_1, x_3) に統合される。(4)式の場合は $a_{23} = 0$ であり、もっとも簡単な場合は $a_{21} = a_{23} = 0$ である。このとき、 N は単独で Khilmi の自己間引本数曲線(12)式に従う。

§ 4 考察

本節では、竹内、Pienaar ら、阪上、西沢ら、森田、南雲ら、鈴木、篠崎ら、Garcia の、主として本報のモデルと関連があるとみられる間伐モデルをとりあげ、log-M式系との比較・検討を試みる。

竹内 (33) は、Khilmi (35) の無間伐林分の蓄積生長式

$$\frac{dV_c}{dt} = B(A - V_c) \quad (22)$$

を基礎に、間伐林分の蓄積生長式、たとえば

$$\frac{d(V_c - V_1)}{dt} = -B_1(V_c - V_1) \quad (23)$$

を導いた。ここで

V_c : 無間伐林分の単位面積当りの蓄積

V_1 : 間伐林分の単位面積当りの蓄積

A, B, B_1 : 定数

である。さらに

$$x_1 = A - V_c, \quad x_2 = A - V_1$$

とおいて変形すると、両式は

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -Bx_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= (B_1 - B)x_1 - B_1x_2 \end{aligned}$$

となる。つまり

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2) \quad , \quad b = B_1 - B_2$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -B & 0 \\ b & -B_1 \end{pmatrix}$$

とおけば

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

となる。これは、無間伐林分と間伐林分の蓄積生長が三角行列 \mathbf{A} の線形システムとして表現されることを示している。このように、無間伐林分と間伐林分の蓄積生長関係を対にして扱ったのは我国では

竹内が初めと思われる。しかし、竹内は実際に間伐林分の生長を扱うに当たっては、(23)式は複雑であると、無間伐林の生長式(22)式と同じ形の Mitscherlich 式

$$\frac{dV_1}{dt} = B'(A' - V_1) \quad (24)$$

を用いている。その際、彼は係数 A' が間伐ごとに変わるとしたが、これは間伐ごとに最終到達量 A' を異にする Mitscherlich 式を乗り換えていくことを意味する。ただし、 B' は不変である。この場合 A' は一種の外力であり、本報の論理でいえば、未だシステム内に内在化されていない。しかし、この A' を(24)式に示すように、無間伐林分の蓄積 V_c で置きかえると、外力としての A' は t の連続関数となり、システム内に内在化されてしまう。筆者の考えでは、 A' を一定とみるか、 A' を t の関数とみるかは単に取扱い上の差にとどまるものでなく、システムとしての本質に関わりがあるように思われる。つまり、 A' を V_c で置き換えたということは、無間伐林分が現実の間伐林分に従属させられたことを意味する。逆にいえば、竹内の間伐モデルは、無間伐の状態を弱い間伐によって微小変化させた場合の復帰過程を表現するものと解釈できる。したがって、強度の間伐によって林冠を大きく疎開させた場合には、 A' を V_c で置き換えることは不可能であり（間伐林分に無間伐林分を従属させることができない）、間伐後の生長は $A' = \text{一定}$ の(24)式で記述されることになろう。このように、(24)式はそれ自体として存在意義を有するのである。竹内は、理論的には、(22)と(23)式を対にした間伐モデルを提案し、実際に適用する際に(24)式を用いているが、これでは(24)式を間伐モデルとする根拠が乏しいように思われる。逆に、(24)式を間伐モデルとして基礎におき、 $A' = V_c$ の特殊な場合として弱度の間伐を論ずべきではなからうか。

次に、同じ無間伐林分の生長モデルから出発しながらも、竹内とは逆に、 A を固定し B を変える形で間伐林分の生長を論じている Pienaar ら (27) の研究について紹介する。

まず彼らは、無間伐林分の胸高断面積合計 B_t を Chapman - Richards 生長関数を用いて、

$$B_t = A \{ 1 - \exp[-k(t - t_0)] \}^{1/(1-m)} \quad (25)$$

と表わし、パラメータ A 、 t_0 、 m は植栽密度 (Initial density 又は plant density) のいかににかかわらず一定、 k のみが植栽密度に応じて変わると仮定した。たとえば、南アメリカの slash pine の固定標準地資料に対しては、パラメータ $A = 337.5 \text{ sq} \cdot \text{ft}/\text{acre}$ 、 $t_0 = 2.4 \text{ years}$ 、 $m = 0.306$ のモデルが適合するとし、パラメータ k ごとの B_t 曲線を描いている。さらに彼らは、ある林齢 t における間伐直後の B_t から k を

$$k = -\ln \{ 1 - (B_t/A)^{1-m} \} / (t - t_0)$$

として求め、その後の間伐林分の生長はこの k と上述のパラメータ A 、 t_0 、 m を有する(25)式で記述できるとしている。彼らのモデルの特徴は、

- 1) 無間伐林分の生長モデルを基礎に間伐林分の生長モデルを導いていること。この点では前述の竹内の考え方や本報の log-M 式を出発点とする考え方に相通ずる面がある。

ロ) パラメータ k ごとの無間伐林分の生長モデルを想定し、その“垂り換え”として間伐モデルを導いていること。A = 一定という最終収量一定則 (law of constant final yield) が前提されており、無間伐林分も間伐林分も等しく同じ上限値 A をもつ。この点は、B を一定、A を間伐ごとに変わる竹内の考え方とは逆である。また、間伐ごとに微分方程式の非同次項にあらわれる外力 $F(t)$ (実はこれは解曲線の上限値を規定している) を $\ln N$ に比例する形で変えていく本報の考え方とも逆である。

ハ) k を間伐ごとに変わるとしているのも、もし間伐区間を無限小にし、 k を t の連続関数にすると、その場合得られる曲線は、Chapman-Richards 関数をより一般的な曲線となる。したがって、Pienaar らの方法を用いて収穫表を作成すると、間伐前もしくは間伐後の B_t 曲線は、(25) 式をより一般化したものになろう。

の三点である。最近の伊藤、大隅 (8) の研究も Pienaar らの方法と軌を一にしており、今後 Richards 関数を基礎とする間伐モデルの研究は一層進展するものと思われる。

以上、竹内と Pienaar らの生長モデルを比較しながら、無間伐林分の生長と間伐林分の生長 (正確には間伐後の生長) との結びつきを考察してきた。彼らの考え方や方法の違いは前述した通りであるが、本数密度 N を前面に出し N と V_1 、あるいは N と B_t の関係を明確に論じていないという意味では両者は共通した面を有する。そこで竹内のモデルを例にとり、本報の間伐モデル構成の立場から本数密度 N を組み込む方法について考えてみたい。まず次の三つの仮定をおく。

イ) 間伐後の蓄積生長式を、(24) 式に外力 $F(t)$ を付加した式

$$\frac{dX}{dt} = d(A - X) + F(t) \quad (26)$$

で表わす。ただし、 X は蓄積、 d 、 A はパラメータ。

ロ) 外力 $F(t)$ は間伐ごとに変化し、間伐区間内では不変。パラメータ d は全生育期間を通じて不変とする。

ハ) 外力 $F(t)$ を本数密度 N の関数、たとえば

$$F(t) = b \cdot \ln N \quad (27)$$

とする。

(27) 式の $F(t)$ を (26) 式に代入すると、

$$\frac{dX}{dt} = d(A' - X) \quad (28)$$

となり、(26) 式の上限値 A は

$$A' = A + (b/d) \ln N$$

に転化する。(28) 式は間伐後の蓄積生長がパラメータ d 、 A' の Mitscherlich 式に従うことを意味する。

さらに、 N がパラメータ a 、 N_* の Khilmi の自己間引曲線

$$\frac{d}{dt} (\ln N) = a (\ln N_* - \ln N)$$

に従うと仮定すると、あらためて

$$x_1 = \ln(N_*/N)$$

$$x_2 = b \ln N_* + dA - X$$

とおくことにより、 x_1 と x_2 、つまり N と X に関する二次元システム

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -ax_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= bx_1 - dx_2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

が得られる。これは本節のはじめに述べた竹内の V_c と V_1 に関する二次元システムと形式的に同じである。しかし、内容は全く正反対である。すなわち、竹内の二次元システムは間伐モデルであるのに対し、ここに新しく導いた二次元システムは無間伐林分の生長モデルである。イ)、ロ)、ハ)の仮定から導かれる生長式はあくまでも間伐林分のモデルであり、基本式はMitscherlich式である。しかし、 N にKhilmiの自己間引曲線を仮定し N 自体を内在化させると、 N と X は上述の二次システムを構成し、対応して X はMitscherlich式を一般化した式に従う。つまり(29)式の第一式から、

$$x_1 = x_0 \exp[-a(t - t_0)]$$

これを第二式に代入すると

$$\frac{dx_2}{dt} = bx_0 \exp[-a(t - t_0)] - dx_2$$

となり、 x_2 は非自律系の方程式に従う。これを解けば、解曲線は

$$x_2 = \alpha + \beta \cdot \exp[-a(t - t_0)] + \gamma \cdot \exp[-d(t - t_0)]$$

の形の指数関数の一次結合(重ね合わせ)となる。なお(29)式の二次元システムは、 x_1 が対数次元でMitscherlich式に従い、 x_2 が基本的にはMitscherlich式に従うという仮定から出発していけるので、いわばlog-M式系とMitscherlich式との「混交系」である。そこで、形式的には混交系の例とみられる阪上(29)の生長モデルについて考えてみたい。

阪上は、単木の個体重 w と葉量 w_L の関係を記述する生長モデルとして

$$\frac{dw}{dt} = aw_L - bw^c \quad (a, b \text{ 定数})$$

$$\frac{1}{w_L} \cdot \frac{dw_L}{dt} = \lambda \left(1 - \frac{w_L}{W_L}\right) \quad (\lambda, W_L \text{ 定数})$$

を提案している。彼は本モデルを誘導するに当たって、イ) 林木の生長は光合成と呼吸によって大部分決定されることから、モデルはこれらに関するパラメータを含む必要のあること ロ) 間伐・枝打等によって変化する量(葉量など)を考慮せねばならない 等の点を指摘しているが、その際特にモデルに含まれる仮定は過去に知られている事実にもとづくべきであることを強調している。そのような観点からよく知られた二つの式、つまり w のVon Bertalanffy式、 w_L のLogistic式が選ばれたわけである。ところで、本モデルは形式的には w と w_L の二次元システムである。本報流の表現でいえば、第一番の式の非同次項 aw_L は一種の外力であり、枝打が断続的に行われる限り、当該木にとって

は自由にならない強制力である。換言すれば、光合成系の量のコントロールは人間の側にあるわけである。これに対して、 w_L をLogistic曲線を介して「内在化」させると、葉量 w_L と w は一つのシステムを構成し、生長は自己体制的になる。なお、次元的には単木レベルと林分レベルの違いはあるが、(28)式で表わされる竹内の間伐モデルの外力項 A' も葉量と密接に関連しているのである。つまり、 A' を間伐ごとに動かすということは、林分全体の葉量を本数密度 N を介して調節しているわけである。したがって、(28)式のごとく A を N の関数とすることは、林分全体の葉量を N の関数とすることと同等であり、さらにその N を時間の関数として表わせば、(29)式のような N と X の二次元システムが得られる。形式的にせよ、ここにシステムとして同形性がある。

次に、少し方向を変えて、相対幹距 S_r を間伐指針とする西沢ら(25)の間伐モデルについて、log-M式系の観点から考えてみよう。最近西沢らは、「最適間伐計画法に関する研究」と題する研究報告を発表した。この報告書は、スギとヒノキの無間伐・間伐林分の収益性を経営・保全の面から追求したものである。すでに第二節で相対幹距 S_r がlog-M式系の状態変数になり得ることを述べたが、これを間伐基準とすることにより様々な間伐計画を比較・検討することができる。対数次元で、

$$\ln S_r = \ln(100) - \ln H - \frac{1}{2} \ln N \quad (30)$$

であるから、 $S_r = \text{一定}$ の $H-N$ 軌道は傾き $-1/2$ の直線をなす。無間伐モデルの場合には、平均高 H に増加型のGompertzかMitscherlich式、本数密度 N にはKhilmi式(減少型のGompertz式)が仮定されている。 H がGompertz式に従う場合、

$$x = \ln(H_*/H), \quad y = \ln(N/N_*)$$

とおくと、例によって

$$\frac{dx}{dt} = -a'x, \quad \frac{dy}{dt} = -d'y \quad (a', d' \text{はパラメータ})$$

であり、さらに

$$z = \ln(S_r/S_{r*}), \quad S_{r*} = \frac{100}{H_*\sqrt{N_*}}$$

とおくと、(30)式より

$$z = x - \frac{1}{2}y \quad (31)$$

となるので、この場合の無間伐モデルは

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -d & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

となる。西沢らのモデルでは、 $S_r^* = 10\%$ となっており、無間伐林分は時間の経過とともに相対幹距を減少させつつ最終的に10%の状態に収束していく。

これに対して、間伐モデルは S_r を一定に、たとえば20%に保持するように構成されている。つまり、 $S_r = \text{一定}$ ($z = \text{一定}$) の「等相対幹距線」上を林分が推移するように、 H に応じて N を定めていくわけである。たとえば、林分が無間伐状態のまま推移し、ある林齢 t_0 で S_r が20%以下に減少したとする。ここで初めて間伐が実施される。間伐直後の本数を \hat{N}_0 とすると、 t_0 における平均高 H_0 と $S_r = 20\%$ から、 \hat{N} は

$$\hat{N} = \left(\frac{100}{S_r H} \right)^2 = \left(\frac{100}{0.2 \times H_0} \right)^2$$

として計算される。 $(t_0 + 5)$ 年後には H が増加した分だけ S_r は減少するが、同様の計算を通じて S_r が20%になるように再び間伐が行われる。この間伐の考え方は理解しやすく、間伐本数の決定方法も簡単である。さらに、本報のlog-M式論からみても理に適っている。というのは、(31)式からわかるように、状態変数 z はlog-M式系の「出力値」の形をしている。つまり、相対幹距 S_r の対数はlog-M式系の出力値であり、これを間伐の指針あるいは制御変数とするのは自然な成り行きである。その他に出力値としては平均直径 D あるいは断面積平均直径 D_b などが考えられる。実際、西沢らのモデルでは、 D_b を

$$D_b = \alpha \cdot N^\beta H^r \quad (32)$$

の形で記述しており、これも $z_b = \ln(D_{b*}/D_b)$ なる量を導入すれば

$$z_b = r x - \beta y$$

となり、 z と同様にlog-M式系の状態変数もしくは出力値となる。ここで、 $D_{b*} = \lim D_b$ である。

他方森田(16)は、形状比の逆数 D/H と収量比数 R_y の関係を軸に、密度と平均直径 D の関係を論じている。森田の指摘にあるように、密度の影響を受ける D を分子に、逆に密度に依存することの少ない H を分母においた方が、密度の違いによる D の変化を直接に表現できるので、 D/H を密度管理の指標とする場合合理的である。森田は、関係式の一例として、

$$D/H = \alpha - \beta \cdot R_y$$

あるいは

$$D/H = \alpha \cdot R_y^\beta \quad (33)$$

を提案している(16)。さらに、 R_y と N の関係を平均高 H を介して

$$N = \alpha' \cdot H^{\beta'} R_y^{r'} \quad (34)$$

の形で記述している。これらの関係式は、ある地位・林齢の H が定まると、収量比数 R_y を介して、形状比 D/H つまり平均直径 D と本数密度 N が必然的に決まることを示している。あるいは逆に、林分の疎密度に応じて D/H を指定すれば、(33)式より R_y が定まり、さらに(34)式より N が定まる。この森田の D/H を密度管理指標とする考え方は、彼の新しい林分密度管理図(17)の中に生かされており、前述の西沢らの相対幹距 S_r を基準とする考え方と対をなすものである。というのは、 D/H と S_r は平均幹

距 s を介して

$$D/H = (D/s) \cdot S_r \quad (35)$$

の関係にあるからである。ここで、右辺の D/s は直径幹距比 (30) とも呼ばれている量で 1 本当りの占有面積に対する林木の利用量を表わしている。したがって、 $D_s = D/s$ とおけば、 $\ln(D/H) = \ln D_s + \ln S_r$ であるので S_r と同様 log-M 式系の状態変数となる。実際、(33) と (34) 式から、 D/H は

$$D/H = \alpha'' N^{\beta''} H^{r''}$$

と表わすことができるので、 D/H は N や H とともに log-M 式系を構成する。より正確に言えば、 S_r や D_b と同様、log-M 式系の出力値であり、 D/H を制御変数として log-M 式系をコントロールすることができる。以上が log-M 式系からみた形状比 D/H の解釈である。

次に、平均断面積の生長を Gompertz 式で記述している南雲ら (19) の研究について、log-M 式系の観点から考えてみる。今、平均断面積を g で表わすと、 g の生長式は

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{dg}{dt} = a \cdot \exp(-ct) + b \cdot \frac{d(\rho) - \bar{d}}{d(\rho)} \quad (36)$$

となる。この式は、実際には、林齢 t 、立木密度 ρ 、平均直径 \bar{d} から 5 年間の g の年平均生長率 Pg を求める式として使われている。ここで、 $d(\rho)$ は

$$d(\rho) = \alpha \cdot \rho^{\beta} \quad (37)$$

として、立木密度 ρ から一意的に決定される平均直径である。 α 、 β は定数。たとえば $\alpha = 1630.64$ 、 $\beta = -0.5923$ である。(37) 式は、通常 Wimmenauer の法則と呼ばれており、地位と林齢に関係なく成り立つ。ところで、(36) 式は、地位と林齢によって決定される指数減少項 (第一項) と立木密度 ρ ごとに平均直径の相対的隔り $(d(\rho) - \bar{d})/d(\rho)$ に応じて加減される項 (第二項) の二つの部分から成り立っている。したがって、かりにある林分が時間の経過とともに、(37) 式の関係を保ちながら推移するとすると、 $\bar{d} = d(\rho)$ であるからその時の g の生長は

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{dg}{dt} = \frac{d}{dt} (\ln g) = a \cdot \exp(-ct)$$

となり、Gompertz 式に従う。つまり、ある林分が“基本線”ともいべき (37) 式上にあるときには、 g は Gompertz 式、本報でいうところの log-M 式のもっとも単純な場合に従う。しかし一般には、現実林分の \bar{d} は $d(\rho)$ とは異なるので、その分だけ対応する g の生長も Gompertz 式からずれることになる。(36) 式は、時間の経過にともなう林分の連続的な生長を記述するモデルとして提案されているが、 \bar{d} や ρ に連続関数を仮定しない限り、これを解いて g の形を具体的に求めることは不可能である。したがって、(36) 式は ρ と \bar{d} の与えられた現実の間伐林分その後の生長を記述するモデルとして考えた方がよいと思われる。なお、 g の生長に関しては、筆者 (14) は、 ρ と g が二次元の log-M 式系

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad , \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ b & -d \end{pmatrix}$$

に従うことを, Spurr らのストローブマツの無間伐林分のデータを用いて示した。ここで,

$$x_1 = \ln(\rho/\rho_*), \quad x_2 = \ln(g_*/g)$$

である。この場合, ρ は Khilmi 式に, g は Gompertz 式を一般化した

$$\ln g(t) = \alpha + \beta \cdot \exp[-a(t-t_0)] + \gamma \cdot \exp[-d(t-t_0)]$$

の形の生長方程式に従う。また, 単位面積あたりの合計量, たとえば断面積合計 G も $x_2 = \ln(G_*/G)$ とおくと, ρ とともに, 二次元システム

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ b' & -d \end{pmatrix}$$

に従うことを明らかにした (14)。以上のように, log-M 式系の立場から g あるいは G の生長曲線は, 対数次元での指数関数の重ね合わせ, 元の次元で Gompertz 曲線の積として表わされることがわかる。これは, 南雲らのモデルにおける Gompertz の一般化と密接な関係をもっている。

なお私信 (1984, 9, 14) によれば, 著者の一人白石は, (36) 式に代わる式として, 平均直径 D に関する生長モデル

$$\frac{1}{D} \cdot \frac{dD}{dt} = a \cdot e^{-ct} + b(K - \beta \ln \rho - \ln D) \quad (38)$$

を研究中とのことであるが, これは形式的には第二節の (14) 式に一致する。しかし, (38) 式は最初から間伐モデルとして提案されていることやその誘導過程に独特の工夫がなされているので, 必ずしも内容的には同じでない。とはいえ, 密度 ρ を Khilmi 式などを介して内在化させると, 本報の三次元 log-M 式系に帰着する。

次に, 本数密度 N ごとの生長曲線を導き, 間伐林分の生長をその“乗り換え”として記述している鈴木 (32) の間伐モデルについて考えてみたい。鈴木は, いろいろな密度で生育する林木を想定し, その時間断面での密度と生長の関係を

$$\partial v / \partial s = h(V - v) \quad (39)$$

なる Mitscherlich 式で表わした。ここで,

v : 平均立木材積

s : 一本当りの平均生育面積

V : 十分な生育空間を与えられた場合の平均材積

h : 定数

である。他方, 林木の平均直径の生長は時間要因に対して Mitscherlich の法則に従うという見地から, 上限値 V が Bertalanffy の法則

$$dV/dt = \alpha \cdot V^{2/3} - \beta \cdot V \quad (40)$$

に従うと仮定し, この二つの式から v に関する

$$v = (\alpha/\beta)^3 \{1 - \exp(-ks)\} \{1 - \exp(-\beta t/3)\}^3 \quad (41)$$

なる生長式を導いた。この式は, s 断面と t 断面の生長を同時に表わしている。つまり, s 断面 (密

度=一定) では v は Bertalanffy の式に従い、上限値 v_*

$$v_* = (\alpha/\beta)^3 \{1 - \exp(-ks)\} \quad (42)$$

をもつ。他方、 t 断面では上限値 V

$$V = (\alpha/\beta)^3 \{1 - \exp(-\beta t/3)\}^3 \quad (43)$$

を有する Mitscherlich 式である。このように、本モデルの特徴は、時間要因 t と密度要因 s を対に扱い、対応する各上限値 v_* 、 V を対をなす他の要因の関数としていることである。たとえば、本数密度を ρ とし、 $s = 1/\rho$ 、 $V = V(t)$ とおくと、(41)式は

$$v = V(t) (1 - e^{-k/\rho}) \quad (44)$$

となり、本式が t 断面での $\rho - v$ 関係式であること、 $\rho \rightarrow 0$ とした時の v の極限值が $V(t)$ であることがはっきりする。なお、この場合の収量 Y は、

$$Y = \rho v = \rho V(t) (1 - e^{-k/\rho}) \quad (45)$$

となり、 ρ の増加とともに Y も単調に増加する。つまり収量は密度の高いほど大きい。特に、 Y の t 方向の極限値を Y_* とすると、(45)式より

$$Y_* = \lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \rho (1 - e^{-k/\rho}) \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = \rho (1 - e^{-k/\rho}) \cdot (\alpha/\beta)^3$$

となり、最終収量 Y_* も ρ の単調増加関数である。したがって、篠崎ら (31) の最終収量一定則は、鈴木モデルにおいては全く否定されている。たとえば、 $\rho \rightarrow \infty$ のとき $Y_* = k(\alpha/\beta)^3$ 、 $\rho \rightarrow 0$ で $Y_* = 0$ である。

次に比較のために、 $\log - M$ 式から導かれる $\rho - v$ 関係について考えてみたい。筆者 (14) は、平均材積 v と本数密度 ρ の関係を自己間引林分について考察し、第二節の三次元 $\log - M$ 式系と本質的に同じ、

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -ax_1, & x_1 &= \ln(\rho/\rho_*) \\ \frac{dx_2}{dt} &= bx_1 - dx_2, & x_2 &= \ln(v_*/v) \end{aligned}$$

を導いた。本式の関係をも、 $\ln \rho$ 、 $\ln v$ で表わすと、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} (\ln \rho) &= a (\ln \rho_* - \ln \rho) \\ \frac{d}{dt} (\ln v) &= d (\ln V_* - \ln v) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

となる。ただし、

$$\ln V_* = (b \ln \rho_* + d \ln v_* - b \ln \rho) / d \quad (47)$$

である。また、 a 、 b 、 d は定数、 $\rho_* = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t)$ 、 $v_* = \lim_{t \rightarrow \infty} v(t)$ である。

さて、見かけ上は、(46)式から $\ln \rho$ と $\ln v$ がともに上限値 $\ln \rho_*$ 、 $\ln V_*$ の Mitscherlich 式に従うことがわかる。しかし、(47)式からわかるように、 v の上限値 V_* は ρ の関数である。したがって、 v は ρ の影響を受ける分だけ、つまり本報流の表現でいえば外力 $F = F(\rho) = \ln V_*$ を受ける分だけ Gompertz 式からずれることになる。そこでいま、あらためて、

$$F = F(\rho) = \ln A - B \cdot \ln \rho \quad (A, B \text{ は定数}) \quad (48)$$

とおくと、(46)式の第二式から

$$\ln v = F(\rho) (1 - e^{-dt}) \quad (49)$$

となる。これは、第三章のごとく ρ を与えられたものとしてみれば、 ρ 断面の生長方程式である。さらに、 ρ の様々な値を想定し、これを独立変数とみなせば、(49)式は鈴木(44)式と同様 t 断面 $v - \rho$ 関係式と考えることができる。そこで、(48)式を(49)式に代入して v と ρ の関係を具体的に求めてみると、

$$v \cdot \rho^{a_t} = K_t \quad (50)$$

となる。ここで、

$$a_t = B(1 - e^{-dt}) \quad (B = \frac{b}{d})$$

$$K_t = A^{(1 - e^{-dt})}$$

である。

(50)式は、吉良ら(9, 10)の $C-D$ 効果(競争密度効果)のべき乗式と呼ばれるものと同形である。すでに筆者(13)は、最終収量一定則など二、三の仮定の下で(50)式と全く同形のべき乗式を導いているが、その場合 $C-D$ 指数と呼ばれる a_t は

$$a_t = 1 - \exp[-\int d(t) dt] = 1 - e^{-dt}$$

の形をしていた。ただし d は定数。これは本報のべき指数 a_t の式で $B=1$ とおいた場合に相当する。実際、この場合最終収量一定法則が成り立っていることは、(48)式からもわかる。すなわち、(48)式において $B=1$ とおくと

$$F(\rho) = \ln A - \ln \rho = \ln(A/\rho)$$

であり、したがって v の上限値を v_* とおけば、

$$v_* = A/\rho$$

となる。 A が定数なので、これは最終収量 ρv_* が一定であることを示している。しかし一般には、 $B \neq 1$ なので最終収量一定則は成立せず、しかもべき乗式を導くには必ずしも必要な仮定ではない。つまり、べき指数 a_t は $t \rightarrow \infty$ において $B = b/d$ に収束するが、これは $b = d$ という特別な場合を除いて1にならない。したがって、最終収量 Y_* も

$$Y_* = \rho v_* = K_* \cdot \rho^{(1-B)} \quad (K_* = \lim K_t)$$

となり、 ρ に依存することになる。

最後に比較のために、最終収量一定則を前提とする篠崎ら(31)の逆数式について一言したい。競争密度効果の逆数式は

$$\frac{1}{w} = A\rho + B \quad (51)$$

w : 平均個体重 ρ : 植栽密度 A, B : 時間 t の関数

と表わされる。この式の導き方は原著に詳しく説明されているので、ここではこれまでの論理にした

がって別の観点から証明することにする。仮定されている生長曲線は Logistic 曲線

$$\frac{1}{w} \cdot \frac{dw}{dt} = \lambda \left(1 - \frac{w}{W}\right)$$

であるが、これは $x = 1/w$ とおくと、

$$\frac{dx}{dt} = \lambda (X - x), \quad X = \frac{1}{W}$$

となり、ここで単純 Logistic (λ, W とも定数) を仮定すると

$$x = X(1 - L \cdot e^{-\lambda t}) \tag{52}$$

となる。初期値を $x_0 = x(0)$ とすると、係数 L は、

$$L = \frac{X - x_0}{X}$$

となるので、これをあらためて上式に代入して整理すると、

$$x = X(1 - e^{-\lambda t}) + x_0 e^{-\lambda t} \tag{53}$$

となる。

次に、例によって(52)式の上限值 X を

$$X = c\rho \quad (c : \text{定数}) \tag{54}$$

とおくと、(53)式より

$$x = c(1 - e^{-\lambda t}) \cdot \rho + x_0 e^{-\lambda t}$$

となり、ここで x を w に戻せば(51)式の逆数式が得られる。ただし、

$$A = c(1 - e^{-\lambda t}), \quad B = x_0 e^{-\lambda t}$$

である。

x が(52)式の Mitscherlich 式に従うことは、Logistic 曲線の逆数線形性を示しているが、これは log-M 式系の対数線形性に対応している。上記の証明のポイントは、上限値を ρ に比例するとおいた点である。これは、log-M 式系の(48)式(対数線形)に対応している。またこの仮定は、 $\rho \cdot W = 1/c = \text{const}$ であるので最終収量一定則の仮定そのものである。このように、log-M 式のみならず、Logistic 曲線を基礎とするモデルにおいても、本稿で述べてきた外力 = 上限値を ρ の関数とする考え方は共通して生きていることがわかる。そのようみていくと、 ρ を「内在化」という発想から ρ と w に関する二次元システムが、Logistic のモデルに対しても誘導できる。たとえば、 x と ρ は線形関係にあるから

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= k(\rho_* - \rho) \\ \frac{dx}{dt} &= b\rho - \lambda x \end{aligned} \right\} \tag{55}$$

なる二次元システムを構成する。この第一式から、 ρ は Mitscherlich 式に従う。他方、 x は二つの指数関数の重ね合わせとして

$$x = \alpha + \beta \cdot e^{-kt} + \gamma \cdot e^{-\lambda t}$$

となるので、その逆数である w は

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{\alpha + \beta \cdot e^{-kt} + \gamma \cdot e^{-\lambda t}}$$

なる一種の拡張 Logistic 曲線に従う。

(5)式は、 ρ と x が二次元線形系を構成していることを示しているが、元の変数 ρ と w の関係でみれば、Mitscherlich 式 (ρ) と Logistic 曲線 (w) との混交系である。このように、様々な曲線を適当な交換を通じて線形の微分方程式に帰着させ、然る後密度 ρ と連立させると、すべて本報の log-M 式系と同等に論ずることができる。たとえば、上限値 X を(5)式の代わりに

$$X = c \cdot \rho^\phi \tag{56}$$

とおくと、(3)式より

$$x = c(1 - e^{-\lambda t}) \cdot \rho + x_0 e^{-\lambda t}$$

となり、これを元の変量 w に戻すと

$$\frac{1}{w} = A \cdot \rho^\phi + B \tag{57}$$

なる $\rho - w$ 関係式が得られる。これは逆数式(5)式の拡張形であり、(5)式から最終収量 Y_* は

$$Y_* = \rho W = \frac{1}{c \cdot \rho^{\phi-1}} \quad (\phi \neq 1)$$

なる ρ の関数となり、もはや最終収量一定則は成立しない。なお、このときの ρ を内在化させた線形系は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho_1}{dt} &= k(\rho_{1*} - \rho_1) \\ \frac{dx}{dt} &= b\rho_1 - \lambda x \end{aligned} \right\} \tag{58}$$

となる。ただし、 $\rho_1 = \rho^\phi$ である。これは ρ をべき変換した場合の例である。そこで次に、 w をべき変換した場合について考えよう。いま、 w のべき変換量 $x = w^{-\theta}$ が(5)または(3)式の Mitscherlich 式に従うものと仮定する。これは、 w が Richards 関数に従うと仮定することと同等である。さらに、 x の上限値 X が(5)式で表わされるものとする。するとただちに、(5)式の左辺の w を w^θ で置き換えることにより、

$$\frac{1}{w^\theta} = A \cdot \rho^\phi + B \tag{59}$$

なる $\rho - w$ 関係式が得られる。これは形式的には、Nelder (24) の与えた式と同じである。しかし、内藤 (22) も指摘しているように、Nelder による誘導方法の詳細は不明である。これに対して、本報の誘導方法は、 w に Richards 関数 (x が Mitscherlich 式)、 x の上限値 X に ρ のべき関数を仮定しているだけであり実に簡単である。この場合も ρ を時間の連続関数として、内在化させると(5)式の二次

元線形系が成り立つ。すなわち、 ρ_1 は Mitscherlich 式、 x_1 は二つの指数関数の重ね合わせであるから、元の変数 ρ 、 w はそれぞれ

$$\rho = [\rho_* (1 - L \cdot e^{-kt})]^{1/\theta}$$

$$w = \left[\frac{1}{(\alpha + \beta \cdot e^{-kt} + \gamma \cdot e^{-\lambda t})} \right]^{1/\theta}$$

の形の Richards 関数およびその拡張形に従う。なお一般に、

$$\rho_1 = \rho^\varphi, \quad x = w^{-\theta}$$

$$y = (\rho_1, x)$$

とおくと、ベクトル y は

$$\left. \begin{aligned} \frac{d y}{d t} &= \mathbf{A} y + \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ \mathbf{b} &= (b_1, b_2) \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

なる二次元非同次線形系を満たす。これは、線形系を媒介とする Richards 関数の一般化であるが、この方面の研究についてはすでに Garcia (2) がより一般的な形で行なっている。彼のモデルは

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= k_1 B^{c_{11}} N^{c_{12}} H^{c_{13}} \\ Y_2 &= k_2 B^{c_{21}} N^{c_{22}} H^{c_{23}} \\ Y_3 &= k_3 B^{c_{31}} N^{c_{32}} H^{c_{33}} \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

なる新しい状態変数 $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ が、線形微分方程式

$$\frac{d Y}{d t} = \mathbf{A} Y + \mathbf{b} \quad (62)$$

を満たすように構成されている。ここで、元の変数 B 、 N 、 H はそれぞれ胸高断面積合計、本数密度、平均高であり、 k_i 、 c_{i1} 、 c_{i2} 、 c_{i3} ($i=1, 2, 3$) は定数である。たとえば、(61)式において $k_1=1$ 、 $c_{12}=\phi$ 、 $c_{11}=c_{13}=0$ 、 $k_2=1$ 、 $c_{21}=-\theta$ 、 $c_{22}=c_{23}=0$ 、 $k_3=0$ とおくと、 $Y = (Y_1, Y_2) = (N^\varphi, B^{-\theta})$ となり、(60)式と同じ形の二次元系に帰着する。このように、Garcia のモデルは、Richards 関数を特殊な場合として含む一般的なモデルである。なお一般に

$$x^c = \exp(c \ln x)$$

であるので、 x^c が線形微分方程式に、つまり x が Richards 関数に従うときには、 x の対数 $\ln x$ はそれらとは別の関数に従う。したがって、Garcia のモデルと本報の log-M 式系は通常相容れない。しかし、 $c \rightarrow 0$ なる極限の場合には、

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{x^c - 1}{c} = \ln x$$

なので、 $c=0$ のときのべき変換を

$$\frac{x^c - 1}{c} = \ln x$$

として定義すれば、Garciaのモデルは本報のLog-M式系を含んでいると考えることもできる。

ところで、Garciaのモデルは林分因子間のべき関係を巧みにとり入れた一般的なモデルである。しかし、彼はモデルの誘導過程においても、またその応用においても3/2乗則や密度と生長の関係に全く言及していない。この点、同じRichards関数に依拠しながらも、密度と生長の関係を主題としている内藤(20, 21, 22)のモデルとは対照的である。彼のモデルの背後には3/2乗則があり、モデルの分析を通じて3/2乗則線(最多密度曲線)への新しい解釈を与えている。同時に筆者(14)もLog-M式系の固有値問題に着目し、現実の林分は二つの固有ベクトル(一つは3/2乗則線、他は密度一定の軌道)の一次結合で表わせることを示した。このように、内藤や筆者の研究は、過去の知見を踏まえつつ、逆にそれらを新しい角度から見直すという形で進められている。そういう意味では、Garciaの一般化とは、モデル構成の仕方という点で大きな違いがある。しかし他方で、密度 ρ を時間の関数とみている点では、共通した面を有している。密度を時間の連続関数とした場合の $w-\rho$ 関係(軌道、トラジェクトリー)や t 断面での $w-\rho$ 曲線については、最近、穂積(6, 7)、内藤(20, 21, 22)、原(5)、筆者(13, 14, 15)らがそれぞれの立場から一連の研究を展開している。本稿では、主として間伐林分の生長モデルに重点をおいたので、 ρ を内在化させた場合 $w-\rho$ 軌道や $w-\rho$ 曲線については特に言及していない。しかし、(8)式から時間 t あるいは初期値 ρ_0 を消去すれば、論理的には $w-\rho$ 軌道と $w-\rho$ 曲線を導くことができる。この点については、いずれ稿を改めて論ずることにした。

§ 5 おわりに

本稿は、密度と生長の関係を一つのシステムとして把える立場から、各種生長モデルの統一的記述を試みたものである。Richards生長関数、Logistic曲線、Gompertz曲線はいずれも、べき変換、逆数変換、対数変換を通じて、簡単な線形微分方程式に帰着する。この線形性をうまく利用すれば、これまで別々に論じられてきた各種生長モデルを同一の論理の下に統合することが可能である。たとえば、密度効果のべき乗式、逆数式、Nelderの拡張逆数式は、同一の論理から導かれている。

本稿でとりあげた生長モデルは、いずれも何らかの意味でLog-M式系に関連のあるものばかりである。また大部分が林分次元での生長を記述するモデルである。そこでいずれ機会をみて、本稿の線形システム論が単木次元の生長モデル、たとえば小林(11)の相対生長を軸とするモデルなどにどこまで適用可能かを考えてみたい。

引用文献

- (1) フォン・ベルタランフィ, L (長野, 太田訳): 一般システム理論。288 pp, みすず書房, 東京, 1976
- (2) Garcia, O: Modelling stand development with stochastic differential equations. FRI Symposium No 20 (Mensuration for management planning of exotic forest plantations): 315~333,

1979

- (3) _____ : A stochastic differential equation model for the height growth of Forest stands. *Biometrics* **39** : 1059 ~ 1072, 1983
- (4) Haken, H : Synergetics - An introduction, nonequilibrium phase transitions and self-organization in physics, chemistry and biology. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1978
(牧島・小森訳 : 協同現象の数理 - 物理, 生物, 化学的系における自律形成。409 pp, 東海大学出版会, 東京, 1981)
- (5) Hara, T : Modelling the time course of self-thinning in crowded plant populations. *Annals of Botany* **53** ; 181 ~ 188, 1984
- (6) Hozumi, K. : Ecological and mathematical considerations on self-thinning in even-aged pure stands (I) Mean plant-weight density trajectory during the course of self-thinning. *Bot. Mag. Tokyo* **90** : 165 ~ 179, 1977
- (7) _____ : Ecological and mathematical considerations on self-thinning in even-aged pure stands (II) Growth analysis of self-thinning. *Bot. Mag. Tokyo* **93** : 149 ~ 166, 1980
- (8) Ito, T & Osumi, S : An analysis of the Basal area growth in even-aged pure stands based on the Richards growth function. *J. Jap. For. Soc.* **66** : 99 ~ 108, 1984
- (9) Kira, T, Ogawa, H. & Hozumi, K. : Intraspecific competition among higher plants (II) Further discussions on Mitscherlich's law. *J. Inst. Polytech., Osaka City Univ. Ser. D5* : 1 ~ 7, 1954
- (10) _____ , _____ & Sakazaki, N. : Intraspecific competition among higher plants (I) Competition yield-density interrelationship in regularly dispersed populations. *J. Inst. Polytech., Osaka City Univ. Ser. D4* : 1 ~ 16, 1953
- (11) 小林正吾 : カラマツ人工林の林分生長モデルに関する研究。北海道林試研報 **15** : 1 ~ 164, 1978
- (12) Leary, R. A. : System identification principles in studies of forest dynamics. *N. Cent. Forest Exp. Sta., St. Paul, Minn.* : 1 ~ 38, 1970
- (13) 箕輪光博 : 林木の生長に関する理論的考察 (I) log - Mitscherlich 式の理論。日林誌 **64** : 461 ~ 467, 1982 C
- (14) _____ : 林木の生長に関する理論的考察 (II) 自己間引モデルの検討。日林誌 **65** : 135 ~ 142, 1983 a
- (15) _____ : 林木の生長に関する理論的考察 (III) 三次元 log - Mitscherlich 式系。日林誌 **65** : 417 ~ 426, 1983 b
- (16) 森田栄一 : 九州地方ヒノキ人工林における一番丸太の材種別収穫量の予想。みどり印刷, 熊本, 36 pp, 1984

- (17) _____ : 時系列解析からみた林分密度管理に関する2, 3の知見—九州地方ヒノキ林—。林統研誌 9 : 5~18, 1984
- (18) Moser, J. W. : Dynamics of an Unevenaged forest stand. For. Sci. 18 : 184~191, 1972
- (19) 南雲秀次郎・白石則彦・田中万里子 : スギ林分収穫表調整法のシステム化に関する研究 — 東大演習林スギ林を対象として — 。東大演報 71 : 269~330, 1981
- (20) 内藤健司 : Richards functionに基づいた林分生長解析 (I) $w-N$ trajectory. 日林誌 65 : 399~407, 1983
- (21) _____ : Richards functionに基づいた林分生長解析 (II) 最多密度曲線。日林誌 66 : 10~16, 1984
- (22) _____ : Richards functionに基づいた林分生長解析 (III) $w-N$ 曲線。日林誌 66 : 454~461, 1984
- (23) _____ : ロジスティック理論と密度管理 — その展開過程—。林統研誌 8 : 1~13, 1983
- (24) Nelder, J. A. : New kinds of systematic designs for spacing experiments. Biometrics 18 : 283~307, 1962
- (25) 西沢正久ら : 最適間伐計画法に関する研究。昭和56年度科研報告 : 1~166, 1984
- (26) 大隅真一 : スギ林の収穫表及びスギ林の生長 (佐藤弥太郎監修 : スギの研究)。387~424, 養賢堂, 東京, 1950
- (27) Pienaar, L. V. & Turnbull, K. J. : The Chapman-Richards Generalization of Von Bertalanffy's growth model for basal area growth and yield in even-aged stands. For. Sci. 19 : 2-22, 1973
- (28) ローゼン, R. (山口昌哉他訳) : 生物学におけるダイナミカルシステムの理論。339pp, 産業図書, 東京, 1974
- (29) 阪上俊郎 : Growth modelの生物学的意味づけについて。林統研誌 8 : 58~61, 1983
- (30) 坂口勝美 : 間伐の本質に関する研究。林試研報 131 : 1~95, 1961
- (31) Shinozaki, K. & Kira, T. : Intraspecific competition among higher plants (VII) Logistic theory of the C-D effect. J. Inst. Polytech., Osaka city Univ. D7 : 35~72, 1956
- (32) 鈴木太七 : 林分密度管理図について。日林中支講 30 : 125~126, 1982
- (33) 竹内公男 : 間伐された林分の蓄積生長式。日林誌 62 : 294~300, 1980
- (34) Yoda, K., Kira, T., Ogawa, H. & Hozumi, K. : Self-thinning in overcrowded pure stands under cultivated and natural conditions. (Intraspecific competition among higher plants). J. Biol. Osaka City Univ. 14 : 107~129, 1963
- (35) Хиллми, Г.Ф. : Foundation of the physics of the biosphere. Leningrad, 1967 (太田邦昌監訳, 物理生態学序説。237 pp, 築地書館, 東京, 1974)