

# 直径分散の増加と拡散モデル\*

—基本となる4モデルについて—

田 中 和 博\*\*

## I. はじめに

生長モデルとその周辺について眺めてみると、林木集団の総量および平均値、すなわち、蓄積、胸高断面積合計、立木密度、平均直径、平均樹高、平均材積などについては、これらを表わす統一的なモデルも構築され体系化されつつある (HOZUMI 1977, HOZUMI 1980, HOZUMI 1983, GARCIA 1979, 箕輪 1982 b, 箕輪 1983 a, 箕輪 1983 b, 箕輪 1985, 内藤 1983, 内藤 1984 a, 内藤 1984 b, HARA 1984)。今後は、平均値だけでなく、分布についても考慮したモデルの研究が多くなるであろう。分布モデルを考えるとき、まず問題となるのが平均値であり、つぎは分散である。分散は、生長論上興味があるばかりでなく、経営戦略上からも意味がある。たとえば、直径分散は材種別の収穫予測には欠かせない情報である。もう一つ興味深いのは、直径分布の変動係数が20数%であり、樹高分布の変動係数とその約半分であるという調査結果である (吉田・平田 1956, 箕輪1982 a)。この経験則はかなり普遍的に成り立つようである。このように、分散に関しては今後の研究が期待される。本小論では、直径分散のモデルを構築する際に基本となる4つの考え方を示す。

## II. 鈴木のエ分遷移の方程式

鈴木は、生長に伴う直径分布の推移を拡散モデルとして考え、エ分遷移の方程式を發表した(1966)。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(\tau, y)}{\partial \tau} = & \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \{ \alpha(\tau, y) \phi(\tau, y) \} \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \{ \beta(\tau, y) \phi(\tau, y) \} \\ & - \gamma(\tau, y) \phi(\tau, y) \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

$\tau$  : 林齡,  $y$  : 直径,  $\phi(\tau, y)$  : 林齡  $\tau$  における直径分布

$\alpha(\tau, y)$  : 直径生長の分散の変化率

$\beta(\tau, y)$  : 直径の生長速度

$\gamma(\tau, y)$  : 枯死の確率

---

\* Kazuhiro TANAKA Increase of the variance of the diameter distribution in a stand and diffusion process models. —Four basic models—

\*\* 東京大学農学部 Fac. of Agric., Univ. of Tokyo, Tokyo 113

これは、熱伝導の方程式に帰着するモデルである。つまり、同齡単純林の直径分布が広がっていくのは、熱が拡散していくのと同じように説明できるというものである。この見解によって、生長論は新しい世界に踏み出したといえよう。

この林分遷移の方程式は、係数関数の関数型を与えることによって具体的なモデルとして表わされるが、鈴木は次の二つのモデルを提唱した。一つは、一連の報告の第Ⅲ報に発表されたもので、係数関数が直径のみの関数となっているモデルである(1967b)。もう一つは第Ⅳ報に発表されたもので、係数関数が林齢のみの関数となっているモデルである(1967c)。つまり、BACHELIER型の場合である。ここで注目すべきことは、どちらのモデルにおいても、林分の平均直径の生長がMITSCHERLICHの生長法則に従うと仮定されていることである。いま、林齢  $t$  に於ける平均直径を  $\bar{x}(t)$  とすれば、MITSCHERLICHの生長法則は次式のように表わされる。

$$\bar{x}(t) = M(1 - l \exp(-kt)) \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $M$ 、 $K$ 、 $l$  はパラメータである。この(2)式を林齢  $t$  について微分してみると、これは(3)式のように  $x$  の関数としても表現できるし、また(4)式のように  $t$  の関数としても表現できる。

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = k(M - \bar{x}(t)) \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{d\bar{x}(t)}{dt} = Mkl e^{-kt} \quad \dots\dots\dots (4)$$

上述の鈴木の場合、第Ⅲ報のモデルでは(3) A型(第Ⅲ報)1967b 式が使われており、第Ⅳ報では(4)式が使われている。では、第Ⅲ報と第Ⅳ報とでは、結果がどのくらい異なるのであろうか。ここでは、視覚的に理解しやすいように、鈴木「森林経理学」(1979)の98ページの図24を転載した。上の図が第Ⅲ報の場合を下の図が第Ⅳ報の場合を示している。このように、同じMITSCHERLICH式を仮定しても、それを林齢の関数として表現するか、直径の関数として表現するかで、結果が大きく変わってしまう。本小論では、この点についての理解を深めることを目的として、基本となる4つのモデルについて若干の考察を行う。本論に入る前に、LANGEVINの方程式とそれに従う過程の分散の求め方について説明しておく。

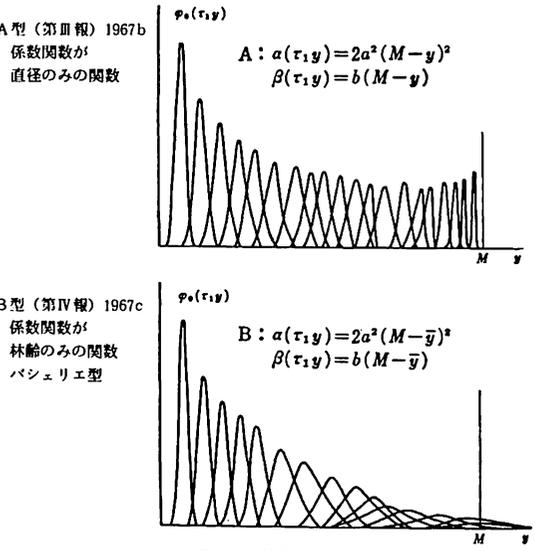


図 24 2種類の係数関数における直径遷移の相違  
Aの場合は極限においても直径は  $M$  を超えず次第に一斉林に近づくが、Bの場合には、半数の直径が  $M$  を超え、極端な不斉林に近づく。

鈴木太七：森林経理学(1979)より

図一 鈴木が提唱した2種類の具体的なモデル

### Ⅲ. 白色雑音を含む LANGEVIN の方程式とそれに従う過程の分散

いま、粒子の位置  $x(t)$  を表わす(5)式のような線形非斉次微分方程式を考える。

$$\frac{dx}{dt} = f(t) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで、非斉次項  $f(t)$  は外力の意味をもっている。 $f(t)$  が普通関数であるならば、初期条件を与えることによって、これを一意的に解くことができる。しかし、 $f(t)$  が確率的に変化する不規則な力であるならば、これを一意的に解くことはできない。一般に、確率的に変化する外力、すなわち確率過程で表わされる外力を非斉次項にもつ方程式を、LANGEVIN 方程式といい、その外力を揺動力とよんでいる。以下に、その例をあげる。ここで  $F(t)$  は揺動力である。

$$\frac{dx}{dt} = F(t) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\frac{dx}{dt} = 2c + F(t) \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{dx}{dt} + \lambda x = F(t) \quad \dots\dots\dots (8)$$

(6)式は、粒子の動きが揺動力のみに支配される場合である。(7)式は、速さ  $2c$  で移動している粒子に揺動力が働いている場合である。 $c$  は漂速とよばれる。(8)式は、ある場所に向かって粒子を引っばる力、すなわち吸引力が働いている場合である。この方程式によって記述される確率過程は ORNSTEIN - UHLENBECK 過程とよばれている。

ここで、特別な場合の LANGEVIN 方程式を考える。すなわち、揺動力が白色雑音の場合である。白色雑音とは、一定のスペクトル密度を有する不規則関数のことであるが、通俗的に解釈するならば、まったくでたらめな揺動力と考えてよい。この不規則関数は、光波ならば白色光であり、音波であるならば、ものすごい雑音として聞こえるものである。(6)式において、揺動力を白色雑音に置き換えると、これはいわゆる BROWN 運動を表わす方程式となる。この方程式によって記述される確率過程は WIENER 過程とよばれている。

つぎに、白色雑音を含む LANGEVIN の方程式によって記述される過程について、粒子の位置の期待値と分散を求めてみよう。例として、ORNSTEIN - UHLENBECK 過程の場合を示す。いま、白色雑音を  $P(t)$  で表わすと、同過程は、

$$\frac{dx}{dt} + \lambda x = P(t) \quad \dots\dots\dots (9)$$

として表わされる。 $t = 0$  のときの初期値を  $x_0$  として、この 1 階線形微分方程式を解けば、

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda \xi} P(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。ここで、あとで行う説明の都合を考えて、(10)式を (11) 式のように変形しておく。

$$x(t) - x_0 e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda \xi} P(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (11)$$

ところで、一般に

$$\Psi = \int_0^t \phi(\xi) P(\xi) d\xi \quad \dots\dots\dots (12)$$

という量を考えると、その分布密度は

$$W(\Psi) = \frac{1}{(4\pi D \int_0^t \phi^2(\xi) d\xi)^{1/2}} \exp\left(-\frac{|\Psi|^2}{4D \int_0^t \phi^2(\xi) d\xi}\right) \quad \dots\dots\dots (13)$$

で与えられる(堀 1977)。ただし、 $D$ は白色雑音の強さである。(11)式の右辺は(12)式とちょうど同じ形をしている。よって、粒子の位置  $x(t)$  の分布密度は

$$W(x, t) = \left[ \frac{\lambda}{2\pi D (1 - e^{-2\lambda t})} \right]^{1/2} \exp\left(-\frac{\lambda |x - x_0 e^{-\lambda t}|^2}{2D (1 - e^{-2\lambda t})}\right) \quad \dots\dots\dots (14)$$

と求まる。すなわち、 $x(t)$  の分散は

$$\sigma^2(t) = \frac{D}{\lambda} (1 - e^{-2\lambda t}) \quad \dots\dots\dots (15)$$

である。

#### IV. 基本となる 4 モデル

白色雑音を含む LANGEVIN の方程式によって記述される過程について、その分布密度が一般的に示されたので、後述のような 4 つの単木直径生長モデルを想定し、それぞれのモデルに対する分散式を求めた。ただし、4 モデルとも、林分の平均直径の生長は MITSCHERLICH の生長法則  $\bar{x}(t) = M(1 - l \exp(-kt))$  に従うものとした。ここで  $\bar{\phantom{x}}$  は平均を意味し、 $x$  は直径、 $t$  は林齢、 $M$ 、 $k$ 、 $l$  はパラメータである。また、4 モデルとも直径の生長速度を、MITSCHERLICH の生長法則を表わす項とランダム変動を表わす項との和とした。ここでは、ランダム変動を白色雑音  $P(t)$  と仮定し、その強さを  $D$  とした。以下、4 つのモデルを順に説明する。

モデル 1 : MITSCHERLICH の生長法則は直径の関数として表わされ、ランダム変動の大きさが一定な場合

これを微分方程式で表わせば、(16)式となる。

$$\frac{dx}{dt} = k(M - x) + P(t) \quad \dots\dots\dots (16)$$

これは、鈴木(1967a)の単木直径生長モデルとしてよく知られている。形式的には、漂速  $kM/2$  と吸引力をもった LANGEVIN の方程式である。各時間断面における直径生長量を縦軸に、直径を横軸にとって図示すれば、このモデルでは、図-2のように、両者の間には負の線形関係が成り立ち、

右下がりの傾きをもった回帰直線が得られる。すなわち、各時間断面における直径生長量は、直径の大きな林木ほど小さい。このモデルの分散式を上述の方法に従って計算すると、(17)式が得られ、鈴木が導いた式と一致する。

$$\sigma^2(t) = \frac{D}{k}(1 - e^{-2kt}) \dots\dots\dots (17)$$

このように、モデル1では、分散の増加もまたMITSCHERLICH式に従っている。

モデル2：MITSCHERLICHの生長法則は林齢の関数として表わされ、ランダム変動の大きさが一定な場合

鈴木の単木直径生長モデル(16)式において、MITSCHERLICHの生長法則の部分を実年齢の関数として表わせば、LANGEVINの方程式は(18)式となる。

$$\frac{dx}{dt} = M k l e^{-kt} + P(t) \dots\dots\dots (18)$$

この場合は、各時間断面における直径生長量のうち、MITSCHERLICHの生長法則によって規定される量は、直径にかかわらず一定となる。すなわち、回帰直線は横軸に平行となる(図-2)。分散は、(19)式で示されるように、林齢に伴い直線的に増加する。

$$\sigma^2(t) = 2 D t \dots\dots\dots (19)$$

モデル1とモデル2は、ともに、直径の生長速度を、MITSCHERLICHの生長法則を表わす項とランダム変動を表わす項との和として考えているが、直径の関数とするか、林齢の関数とするかに応じて得られた分散は異なっている。モデル1の場合は吸引力があるため吸引と拡散との均衡点が存在し、その結果、分散の上限値が $D/k$ となるが、モデル2の場合は、時間がどれほど経っても、ランダム変動 $P(t)$ の影響がいつまでも存在するため、分散に上限値はない。

モデル3：MITSCHERLICHの生長法則は林齢の関数として表わされ、ランダム変動の大きさが平均直径の生長速度に比例する場合

モデル2では、ランダム変動の大きさが一定であったため、その影響がいつまでも残り、分散は時間に比例して増大していた。ランダム変動の大きさが時間とともに漸減し、究極的にゼロになるのであれば、分散は上限値をもつものと考えられる。平均直径の生長速度はMITSCHERLICHの生長法則に従い、時間の経過とともに指数関数的に減少するが、ランダム変動の大きさが平均直径の生長速度に比例すると考えるのは、不自然な仮定ではない。いま、比例定数を $\gamma$ とすると、(18)式のLANGEVINの方程式は(20)式のように書き換えられる。

$$\frac{dx}{dt} = M k l e^{-kt} + \gamma M k l e^{-kt} \cdot P(t) \dots\dots\dots (20)$$

この場合の分散式は(21)式で与えられる。これは、モデル1と同様、MITSCHERLICH式である。ただし上限値は異なり、その値は、パラメータ $M$ 、 $l$ および比例定数 $\gamma$ に関してそれぞれの2乗に比例している。

$$\sigma^2(t) = D \gamma^2 M^2 k l^2 (1 - e^{-2kt}) \dots\dots\dots (21)$$

林分遷移の方程式において、その係数関数が林齢のみの関数であるとき、これをBACHELIER型と称する。BACHELIER型のモデルを作成する場合は、その係数関数の関数型を決定する段階から、林齢のみの関数で考察する必要があったのではなからうか。筆者は、いまにして、そう思うのである。梅村・鈴木は尾鷲市内のヒノキ林の資料を分析した結果、次のように述べている。「現実の直径遷移確率も主に林齢に関係しているが、個々の林分の直径には関係しないことがわかった。(中略)。その比(比較的短い時間に、一つ上の径級に進級する確率と元の径級にそのままとどまる確率との比：筆者注)を標準地別、林齢別、径級別に比較したところ、はじめの標準地と林齢には有意差があったが、径級には有意差はなかった。(中略)。このことによって、われわれが係数関数を $t$ のみの関数と考えたことが一応正しかったものと考ええる。しかしながら、この点はさらに詳細な検討を要するところであろう。」(1974)。ここで展開されている内容は、比較的短い期間の直径生長量は直径に依存しないというものであり、モデル2およびモデル3の考え方に近い立場である。しかしながら、この件に関しては、その後の発表はないようである。これは、一つには、モデル3の分散式とモデル1の分散式とが、どちらもMITSCHERLICH式で表わされ、よく似ていたため、実用上問題が生じず、その結果詳細に検討されなかったからではないかと考えている。もう一つの理由は、後で紹介するように、SLOBODAによって、より現実に近いモデルが発表された(1976)ためであろう。

モデル4：MITSCHERLICHの生長法則は直径の関数として表わされ、ランダム変動の大きさが平均直径の生長速度に比例する場合

モデル3では、ランダム変動の大きさが平均直径の生長速度に比例して減少することを仮定として採用したが、この考え方をモデル1に適用したのがモデル4である。この仮定に基づけば、(16)式のLANGEVINの方程式は(22)式のように書き換えられる。また、分散は(23)式で与えられる。

$$\frac{dx}{dt} = k(M - x) + \gamma M k l e^{-kt} \cdot P(t) \dots\dots\dots (22)$$

$$\sigma^2(t) = 2 D \gamma^2 M^2 k^2 l^2 e^{-2kt} \cdot t \dots\dots\dots (23)$$

分散は最初は単調増加するものの、林齢 $1 / (2k)$ で最大値に達し、その後は単調減少してゼロに収束する(図-2)。すなわち、最初のうちは生長に伴う分散の増加が認められるが、生長の衰えとともに吸引力の影響が絶大となる。

モデル  
ランダム変動の大きさ  
MITSCHERLICH式

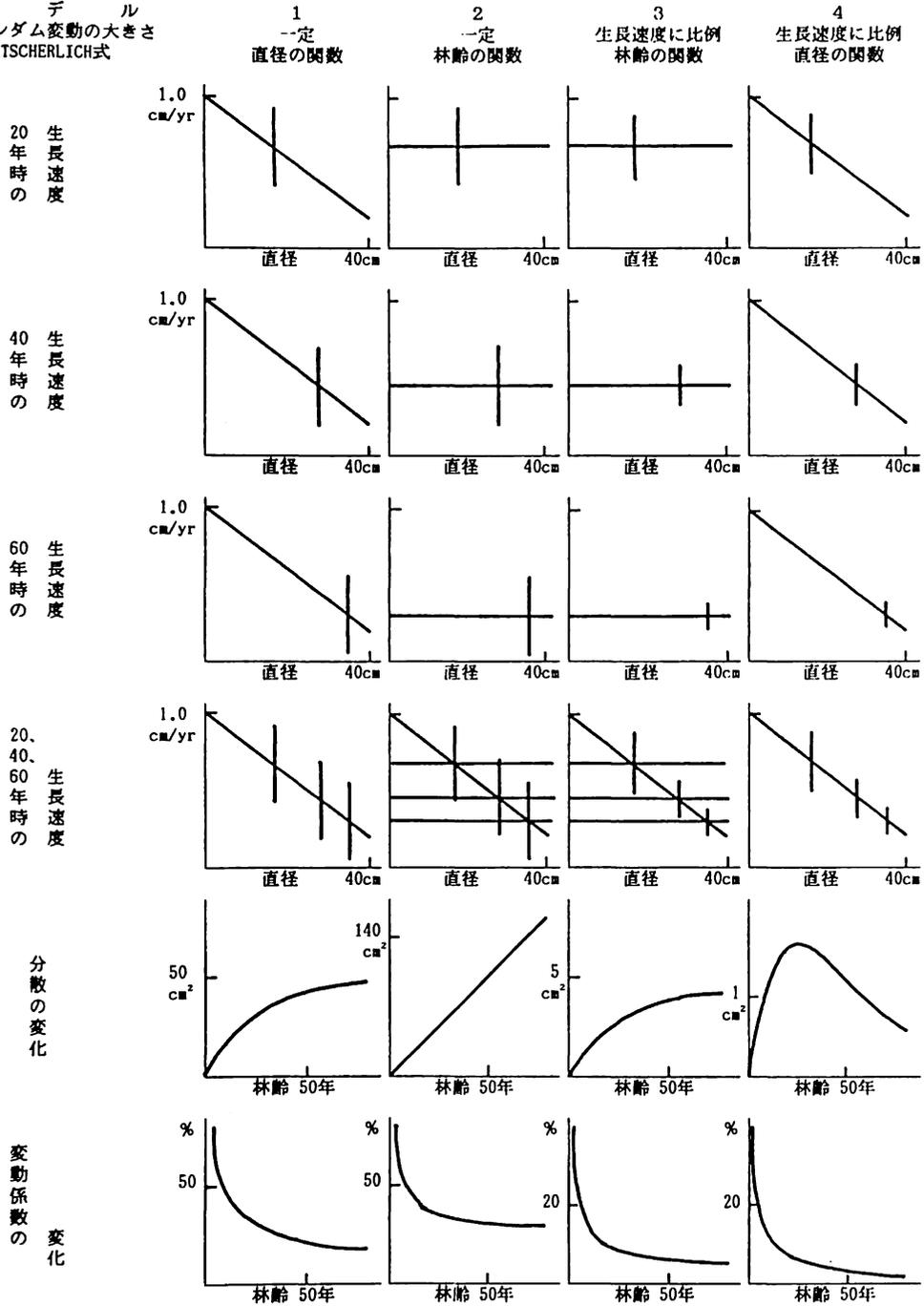


図-2 4つのモデルの比較

( $M = 50$ ,  $k = 0.02$ ,  $l = 1.0$ ,  $r = 0.3$ ,  $D = 1.0$ )

各時間断面において、縦線はランダム変動の大きさを表わし、回帰直線との交点のx座標はその時点における平均直径を、y座標は平均直径木の平均生長速度を示している。

以上、4つのモデルについて、それぞれの分散式を求め、その特徴を考察したが、ここでそれらを整理し、比較する。図-2に、4モデルについて、各時間断面の模式図と林齢に伴う分散の変化図を一枚の図にまとめて示した。この図では、MITSCHERLICHの生長曲線のパラメータを以下のような値に指定した。すなわち、 $M=50$ 、 $k=0.02$ 、 $l=1.0$ 、 $\gamma=0.3$ 、 $D=1.0$ である。これらのパラメータは、スギ同齢単純林の標準的な値である。

各時間断面の模式図では、縦軸に生長速度、横軸に直径をとり、直径に対する生長速度の回帰直線を示した。よって、モデル1と4では、回帰直線は右下がりの直線となっており、モデル2と3では、回帰直線は横軸に平行な直線となっている。時間断面は、林齢20年、40年および60年の場合を示し、図の縮尺は同一とした。各時間断面において、縦線は、ランダム変動の大きさを表わし、回帰直線との交点の $x$ 座標はその時点における平均直径を、 $y$ 座標は平均直径木の平均生長速度を示している。この場合、生長速度と直径との間に線形関係が成立しているから、平均直径木の平均生長速度は、全林木の生長速度の平均に等しい。なお、図に描かれているランダム変動の大きさは、図を見やすくするため、適宜縮小したものである。しかし、モデル1と2および3と4では同一の縮尺にした。

また、林齢20年、40年および60年の時間断面を一枚の図に表わしたのもも添えた。モデル2および3には、右下がりの直線が描かれているが、これは、平均直径の生長がMITSCHERLICHの生長法則に従うことを示している。

林齢に伴う分散の変化を、図-2の下から2番目に示した。モデル3および4の分散は、モデル1および2のそれと比較して、相当小さい。モデル1と3は、上限値のみが異なる同じMITSCHERLICH式によって表わされているが、モデル1の上限値が50cm<sup>2</sup>であるのに対して、モデル3のそれは4.5cm<sup>2</sup>と約10分の1の大きさである。林齢に伴う変動係数の変化を図-2の一番下に示した。現実の同齢単純林では、直径分布の変動係数は20数%であり、生長に伴い微増する。モデル1では、変動係数は漸減しており、また、幼齢期の値は大きすぎると考えられる。モデル3でも、変動係数は漸減しており、その値も幼齢期を除いて全体に小さすぎる。これらの結果は、直径分散の増加には、ランダム変動以外の他の要因も関与していることを示唆している。

## V. 現実の直径生長とモデルの改良

現実の林分の各時間断面における直径の生長を図-3に示す。この林分は東京大学農学部附属千葉演習林11林班C1小班にある郷台1号固定試験林であり、1985年現在80年生のスギ同齢単純林である。この試験林の調査結果は、竹内らによってまとめられ発表されている(1975)。図-3は、竹内らの資料に基づき、約10年間の定期直径生長量と期首の直径との関係を表わしたものである。白丸は各林木の値を示している。なお、被圧木の生長経過が解析結果に及ぼす影響をさけるため、78年生まで生存していた林木のみを解析の対象とした。また、生長経過から判断して、測定ミスと思われる資料は棄却した。解析木は96本であった。

定期直径生長量と期首の直径との間には、明瞭な線形関係が認められた。図中の直線は、期首の直

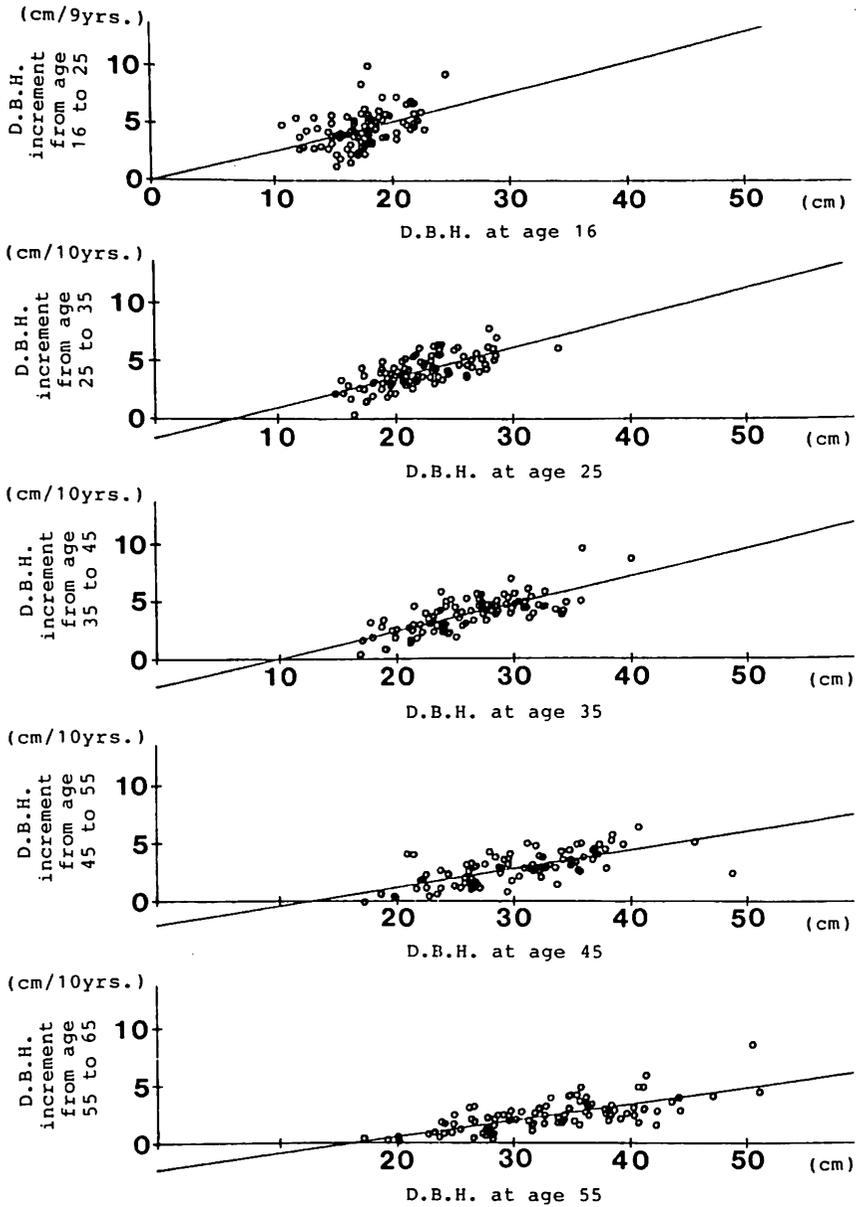


図-3 定期直径生長量と期首直径との関係  
 (東大千葉演郷台1号, TANAKA (未発表) より)  
 ○印は各林木の値を示す。  
 直線は、期首の直径に対する定期直径生長量の回帰直線である。

径に対する定期直径生長量の回帰直線である。このような線形関係が存在することは、古くから知られている (PRODAN 1951, 大隅ら 1971)。回帰直線の傾きは、生長に伴い減少する傾向にあった。また、回帰直線は  $x$  切片をもっており、その切片は、生長とともに増加していた。回帰直線のまわりの各林木の値のバラツキ方は、直径には依存しないとみなせた。直径階別の定期直径生長量の分散を F 検定した結果は、これを大方において支持していた。定期直径生長量の回帰直線のまわりのバラツキの大きさの標準偏差は、その時点の平均直径生長量に比例しているとみなせた。これらが、郷台 1 号試験林の直径生長のおもな特徴である。

SLOBODA は、直径生長をつぎのような線形拡散方程式で表わした (1976, 1977, 1984)。これは、ITO 方程式とよばれる形式で書かれている。

$$dX_t = [A(t)X_t + a(t)] dt + B(t) dW_t \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで、 $A(t)X_t + a(t)$  は各時間断面における直径 ( $X$ ) に対する直径生長量の回帰直線を表わしており、 $dW_t$  は WIENER 過程を表わしている。すなわち、ランダム変動を白色雑音であると仮定している。この方程式に対する具体的な生長モデルを SLOBODA は次式で与えた。なお、式の形は、本小論の形式に統一するため書き換えてある。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k l e^{-kt}}{1 - l e^{-kt}} x + b e^{-kt} \cdot P(t) \quad \dots\dots\dots (25)$$

この式では、回帰直線は原点を通ることが仮定されている。すなわち、(24) 式の  $a(t)$  はゼロと仮定されている。また、平均直径の生長は、MITSCHERLICH の法則に従うと仮定され、回帰直線の傾きもそのように表わされている。ランダム変動の大きさは、本小論のモデル 3 と同様に、その標準偏差が直径の平均生長量に比例すると仮定されている。このモデルは、回帰直線が原点を通るという仮定を除けば、郷台 1 号の直径生長の特徴をよく表現している。

SLOBODA は、この具体的なモデルに対する分散式を解析的に求めた (1976, 1977) が、その結果は、モデル 3 のように小さすぎるということはなく、現実に近いものであった。このモデルでは、直径分散の増加は、ランダム変動ばかりでなく、各時間断面における回帰直線の正の傾きによっても説明されている。なぜなら、確率変数  $y$  が確率変数  $x$  の一次式で表わされている場合、 $y$  の分散は、 $x$  の分散と一次式の傾きの 2 乗との積として表わされるからである。

一方、筆者は、上記の郷台 1 号試験地の資料から、平均直径と回帰直線の  $x$  切片との間に線形関係が成り立つことを見だし (未発表)、この関係を、SLOBODA の (24) 式のモデルに代入し、分散式を解析的に求めた。その結果、分散の増加が RICHARDS の生長曲線で近似できることを示した (未発表)。得られた分散式は、郷台 1 号の直径分散の増加に対して、よい適合を示した。

このように、モデル 3 を発展させたものとして、SLOBODA のモデルおよび筆者のモデルが提示された。これらのモデルには、ランダム変動の大きさがその時点の平均直径の生長速度に比例するという共通点がある。また、直径に対する直径生長量の回帰直線に関しては、モデル 3 は横軸に平行な線

であり、SLOBODAのモデルでは原点を通り、筆者のモデルでは $x$ 切片をもっているという相違がある。これらのモデルの仮説に関しては、なお詳細な検討が必要である。とくに、直径階別の分散の大きさに関する仮定および白色雑音に関する仮定は、まだ一般に認められているものではない。

## VI. おわりに

以上、生長モデルを考える場合に基本となるであろう4つのモデルを示し、また、モデル3を拡張したものとして、SLOBODAモデルと筆者のモデルを紹介した。これらのモデルのうち、どのモデルがよいかは一概には言えない。それは、何を対象とするかによって異なるし、細かいことを言えば、樹種や施業方法によっても異なると考えられるからである。

たとえば、モデル3およびその拡張モデルは、競争が無い場合の同齢単純林の直径生長または樹高生長にあてはまるものではないかと考えている。というのは、これらのモデルは、基本的には、その生長が林齢によって規定されており、立木密度の効果などを反映する要因がモデルに取り込まれていないからである。よって、間伐の効果や複層林の生長を記述するには、別のモデルを作成する必要がある。

生長モデルを構築する場合に注意すべきことは、各時間断面での関係を表わす微分方程式と全期間を通じての関係を表わす微分方程式とを区別することである。たとえば、SLOBODAや筆者のモデルでは、各時間断面での関係を表わす微分方程式は、見かけ上、直径生長量は直径の関数として右上がりの一次式で表わされており、全期間を通じての関係を表わす微分方程式において、直径生長量が直径の関数として右下がりの一次式で表わされていることと対照的である。前者は、各時間断面における個々の林木の生長の差異を表わしており、後者は、生長に伴う平均直径のトラジェクトリー（軌道）を、直径・直径生長量平面に射影したものである。この二つの微分方程式を厳密に区別することが重要であるとともに、前者の微分方程式をどのように表現するかが、分布モデルを構築していく際の鍵となるであろう。

## 引用文献

- (1) GARCIA, O : Modelling stand development with stochastic differential equations, FRI Symposium 20 (Mensuration for management planning of exotic forest plantations) : 315~333, 1979
- (2) HARA, T. : Modelling the time course of self-thinning in crowded plant populations, Annals of Botany 53 : 181~188, 1984
- (3) 堀 淳一 : ランジュバン方程式, 193pp, 岩波書店, 東京, 1977
- (4) HOZUMI, K. : Ecological and mathematical considerations on self-thinning in even-aged pure stands ( I )  
Mean plant-weight density trajectory during the course of self-thinning, Bot. Mag. Tokyo 90 : 165~179, 1977

- (5) ——— : Ecological and mathematical considerations on self-thinning in even-aged pure stands (II)  
Growth analysis of self-thinning. Bot. Mag. Tokyo 93 : 149~166, 1980
- (6) ——— : Ecological and mathematical considerations on self-thinning in even-aged pure stands (III)  
Effect of the linear growth factor on self-thinning and its model. Bot. Mag. Tokyo 96 : 171~191, 1983
- (7) 箕輪光博 : 生長モデルとしてのワイブル分布について. 林統研誌 7 : 44~53, 1982 a
- (8) ——— : 林木の生長に関する理論的考察 (I)  $\log$ -MITSCHERLICH 式の理論. 日林誌 64 : 461~467, 1982 b
- (9) ——— : 林木の生長に関する理論的考察 (II) 自己間引モデルの検討. 日林誌 65 : 135~142, 1983 a
- (10) ——— : 林木の生長に関する理論的考察 (III) 三次元  $\log$ -MITSCHERLICH 式系. 日林誌 65 : 417~426, 1983 b
- (11) ——— : 線形システムとしての林分の生長. 林統研誌 10 : 1~24, 1985
- (12) 内藤健司 : RICHARDS function に基づいた林分生長解析 (I) W-N trajectory. 日林誌 65 : 399~407, 1983
- (13) ——— : RICHARDS function に基づいた林分生長解析 (II) 最多密度曲線. 日林誌 66 : 10~16, 1984 a
- (14) ——— : RICHARDS function に基づいた林分生長解析 (III) W-N 曲線. 日林誌 66 : 454~461, 1984 b
- (15) 大隅眞一・北村昌美・菅原 聰・大内幸雄・梶原幹弘・今永正明 : 森林計測学. 415pp. 養賢堂, 東京, 1971
- (16) PRODAN, M. : Messung der Waldbestände. 260pp, J. D. Sauerlander's Verlag, Frankfurt/M., 1951
- (17) SLOBODA, B. : Mathematische und stochastische Modelle zur Beschreibung der Dynamic von Baumen und Beständen, insbesondere das bestandesspezifische Wachstum als stochastischer Prozess, Freiburg i. Br. eingereicht als Habilitation an der Forstl. Fakultät. 153~265, 1976
- (18) ——— : KOLMOGOROW-SUZUKI und stochastische Differentialgleichung als Beschreibungsmittel der Bestandesevolution. Mitt. der For. Bundesversuchsanstalt Wien 120 : 71~82, 1977
- (19) ——— : Possibilities of mathematically predicting timber production in commercial forests. Bull. Nagoya Univ. For. 7 : 261~279, 1984

- (20) 鈴木太七：確率過程としての林分の遷移（Ⅰ）．日林誌48：436～439，1966
- (21) ——：確率過程としての林分の遷移（Ⅱ）．日林誌49：17～19，1967 a
- (22) ——：確率過程としての林分の遷移（Ⅲ）．日林誌49：208～210，1967 b
- (23) ——：確率過程としての林分の遷移（Ⅳ）．日林誌49：402～404，1967 c
- (24) ——：森林経理学．197pp，朝倉書店，東京，1979
- (25) 竹内公男・長谷川 茂：千葉演習林における林分生長資料．演習林19：69～175，1975
- (26) TANAKA, K. : A stochastic model of diameter growth in an even-aged pure forest stand, J. Jpn. For. Soc. in press
- (27) 梅村武夫・鈴木太七：確率過程としての林分の遷移（Ⅴ）．日林誌56：195～204，1974
- (28) 吉田正男・平田種男：植栽林の林木構成状態に関する統計的研究（Ⅶ）．東大演報52：1～14，1956