

# 材積式の多重共線性\*

高田 和彦\*\*

## I. はしがき

線形回帰モデルにおいて、2つ以上の独立変数がある場合には、これらの変数の系列は互いに独立であるという仮定が認められていなければならない。もしも、2つの変数間に、厳密に線形関係が認められる時には、多重共線関係があるといい、最小二乗法により解を求めることはできない。

2変数材積式では、胸高直径と樹高を変数として用いている。胸高直径<sup>2</sup>×樹高を1つの変数として用いる場合には、共線性の問題はないが、胸高直径と樹高をそれぞれ1つの変数として用いる場合、特に、同一の胸高直径に対する樹高の範囲が狭いデータで、胸高直径と樹高の対数を用いる場合には、両者の間に高い相関関係が認められるので、この影響を考慮する必要がある。

本稿では、同一胸高直径に対する樹高の分布範囲を変えた3通りの資料を人為的に作成し、共線性について検討した。

## II. 資料

資料は、林野庁発行の材積表調製業務資料の中より、スギは、秋田営林局(以下営林局は省略する)、名古屋、高知、熊本飫肥地方、ヒノキは、前橋、東京、名古屋、長野、熊本、カラマツは、秋田、前橋、名古屋、長野、アカマツは、前橋表日本、前橋裏日本、東京、熊本、熊本霧島地方の計18を用いた(以上すべて人工林である)。

業務資料では、胸高直径、樹高別に、同一胸高直径、同一樹高の樹木数が2本以上の場合は、それらの平均材積が示されているので、これを用いる場合には、平均材積を1本とする場合と平均材積に基づく本数を重みとして乗ずる場合の2つが考えられるが、本稿では前者を用いた。

これらの資料に基づき、各胸高直径について連続する樹高の範囲を求め、その範囲の中心の樹高の樹木のみを資料とする場合、これに加えて、中心の樹高と最大、最小樹高との中間の樹高の樹木を資料とする場合、さらに、これらに加えて、最大と最小の樹高の樹木を資料とする場合の3種の資料を作成した。これらを順に、資料1、資料2および資料3とよぶ。各資料の胸高直径、樹高の範囲と本数を表-1に示す。

---

\* Kazuhiko TAKATA : Multicollinearity for volume equations

\*\* 新潟大学農学部 Fac. of Agric., Niigata Univ., Niigata 950-21

表-1 資料の胸高直径、樹高範囲と本数

資料番号		1			2			3		
樹種	地区	胸高直径	樹	高	本	数	本	数	本	数
スギ	秋名高熊	田屋知肥	8 - 54	7 - 29	6 - 30	4 - 33	24	72	120	
		古屋知肥	8 - 48	7 - 26	6 - 28	4 - 30	21	63	105	
		本飼肥	8 - 32	8 - 24	6 - 25	5 - 26	13	39	65	
ヒノキ	前東名長熊	本飼肥	8 - 52	7 - 23	6 - 25	5 - 27	23	69	115	
		橋野	8 - 38	9 - 23	7 - 25	5 - 27	16	48	80	
		京野	8 - 34	9 - 20	8 - 26	6 - 24	14	42	70	
		古野	8 - 36	9 - 22	8 - 24	7 - 26	15	45	75	
		本野	8 - 34	8 - 19	7 - 21	5 - 24	14	42	70	
カラマツ	秋前名長熊	本野	8 - 34	8 - 17	7 - 19	5 - 22	14	42	70	
		田橋	8 - 46	10 - 28	9 - 29	7 - 31	20	60	100	
		古屋野	8 - 44	9 - 25	8 - 26	6 - 28	18	54	90	
アカマツ	前橋東熊	日本	8 - 42	9 - 26	8 - 28	6 - 30	18	54	90	
		表日本	8 - 54	9 - 23	7 - 25	5 - 28	23	69	115	
		裏日本	10 - 42	9 - 20	8 - 22	7 - 24	16	48	80	
		京本	8 - 48	9 - 20	8 - 22	6 - 25	21	63	105	
		本霧島	8 - 48	9 - 24	7 - 25	5 - 27	21	63	105	
			8 - 40	7 - 21	6 - 23	4 - 25	17	51	85	

### III. 方法および結果

胸高直径と樹高を用いる材積式としては、胸高直径と樹高が独立に変数として用いられている

$$v = ad^b h^c \quad \dots\dots\dots (1)$$

と、胸高直径の2乗に樹高を乗じたものが1つの変数として用いられている

$$v = d^2 h / (a + b d) \quad \dots\dots\dots (2)$$

の2式を用いた。ここで、 $v$ は材積、 $d$ は胸高直径、 $h$ は樹高である。また、これらの式と比較するために、胸高直径のみを変数とする

$$v = a d^b \quad \dots\dots\dots (3)$$

も用いた。

(1), (2), (3)式は、それぞれ、

$$\log v = a + b \log d + c \log h \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$d^2 h / v = a + b d \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\log v = \log a + b \log d \quad \dots\dots\dots (6)$$

に変型して、各式のパラメータ、パラメータの標準偏差を求めた。求めたパラメータを用い、(1), (2), (3)式により材積を推定したが、(1), (3)式は対数式(4), (6)式として解いたために、補正係数

$$10^{\frac{n}{n-1} \times 1.1513 \times \sigma^2}$$

ここで $n$ はデータ数、 $\sigma^2$ は(4), (6)式の分散を材積に乗じたものを改めて推定材積とした。

さらに、各式の精度をみるために、赤池の情報量基準

$$AIC = n(\log 2\pi + 1) + n \log \sigma^2 + 2(m+1)$$

ここで、 $n$ はデータ数、 $\sigma^2$ は(1)、(2)、(3)式の分散、 $m$ は式のパラメータ数を求めた。

なお、共線性を検討するために、胸高直径と樹高の対数における相関係数をも求めた。これらの値を表-2に示す。

表-2より、相関係数は、資料1では、スギ、ヒノキ、カラマツでは、0.98を示し、アカマツでは

表-2 各式のパラメータ、その標準偏差、AICおよび胸高直径と樹高の対数における相関係数

樹種	地区	資料番号	$v = ad^{bh^c}$						$v = d^2 h^c / (a+bd)$				$v = ad^b$				
			a	b	c	D(b)	D(c)	AIC	r	a	b	D(b)	AIC	a	b	D(b)	AIC
スギ	秋田	1	-1.287	1.677	1.239	0.221	0.159	251.0	0.993	22.42	0.147	0.015	251.4	-1.028	2.598	0.027	287.5
		2	-1.249	1.714	1.181	0.053	0.037	766.9	0.958	22.28	0.156	0.010	750.3	-1.022	2.594	0.033	917.5
		3	-1.239	1.775	1.103	0.037	0.026	1338.0	0.880	22.75	0.146	0.012	1345.0	-1.055	2.612	0.043	1641.0
	名古屋	1	-1.253	1.715	1.187	0.130	0.089	233.0	0.962	22.12	0.163	0.024	232.4	-1.114	2.646	0.064	274.6
		2	-1.208	1.849	1.003	0.057	0.039	688.8	0.922	21.60	0.167	0.014	679.9	-1.090	2.634	0.044	817.8
		3	-1.186	1.817	1.023	0.034	0.022	1126.0	0.834	21.30	0.171	0.013	1115.0	-1.102	2.637	0.055	1423.0
	高知	1	-1.131	1.666	1.123	0.240	0.163	108.5	0.991	18.91	0.340	0.032	110.5	-0.809	2.464	0.036	127.4
		2	-1.097	1.790	0.958	0.053	0.038	318.0	0.915	19.14	0.342	0.019	316.0	-0.859	2.496	0.053	394.4
		3	-1.092	1.823	0.922	0.040	0.027	541.1	0.785	18.90	0.340	0.022	530.2	-0.884	2.514	0.071	732.3
	熊本	1	-1.102	1.748	1.015	0.084	0.074	195.8	0.984	20.12	0.262	0.010	192.0	-0.693	2.315	0.024	241.9
		2	-1.139	1.776	1.016	0.071	0.061	751.2	0.933	20.58	0.235	0.013	737.2	-0.721	2.338	0.030	834.0
		3	-1.188	1.789	1.039	0.041	0.034	1276.0	0.824	21.65	0.209	0.014	1264.0	-0.766	2.364	0.039	1509.0
ヒノキ	前橋	1	-1.397	1.687	1.330	0.154	0.140	144.7	0.977	22.11	0.189	0.027	157.9	-0.718	2.361	0.042	180.2
		2	-1.374	1.758	1.234	0.034	0.030	446.9	0.873	22.71	0.154	0.018	483.2	-0.752	2.387	0.053	569.5
		3	-1.271	1.758	1.151	0.035	0.028	771.5	0.712	21.63	0.194	0.023	813.2	-0.739	2.375	0.070	992.9
	東京	1	-1.361	1.788	1.190	0.401	0.114	90.0	0.988	22.59	0.159	0.013	101.9	-0.772	2.401	0.030	131.9
		2	-1.300	1.819	1.105	0.057	0.050	351.4	0.903	22.03	0.182	0.017	348.2	-0.767	2.396	0.045	447.3
		3	-1.281	1.837	1.075	0.044	0.036	660.3	0.746	21.89	0.170	0.023	662.0	-0.773	2.404	0.064	824.7
	名古屋	1	-1.383	1.893	1.087	0.235	0.189	129.3	0.989	24.68	0.071	0.023	124.8	-0.949	2.550	0.032	149.3
		2	-1.413	1.893	1.117	0.077	0.061	401.1	0.951	24.96	0.045	0.017	400.5	-0.968	2.569	0.035	487.7
		3	-1.413	1.863	1.148	0.050	0.039	711.3	0.859	24.79	0.060	0.021	717.5	-0.968	2.566	0.051	883.4
	長野	1	-1.478	1.577	1.518	0.213	0.179	96.5	0.982	22.91	0.179	0.037	107.3	-0.852	2.451	0.052	133.3
		2	-1.413	1.679	1.355	0.063	0.051	377.9	0.889	22.81	0.164	0.032	393.3	-0.871	2.470	0.066	464.9
		3	-1.305	1.704	1.236	0.089	0.067	681.8	0.728	22.50	0.185	0.077	714.2	-0.842	2.444	0.093	845.8
熊本	1	-1.342	1.758	1.210	0.120	0.107	108.6	0.967	22.14	0.190	0.023	110.9	-0.776	2.386	0.050	146.8	
	2	-1.300	1.798	1.133	0.055	0.153	347.2	0.863	21.82	0.196	0.021	363.1	-0.764	2.382	0.058	487.2	
	3	-1.301	1.813	1.116	0.038	0.030	662.5	0.689	22.15	0.176	0.026	678.7	-0.806	2.408	0.078	832.3	
カラマツ	秋田	1	-1.573	1.535	1.632	0.202	0.170	177.4	0.992	23.66	0.104	0.022	208.6	-0.810	2.466	0.031	238.6
		2	-1.281	1.823	1.083	0.043	0.036	597.4	0.908	22.81	0.137	0.012	619.2	-0.759	2.428	0.047	749.1
		3	-1.208	1.877	0.968	0.022	0.017	994.3	0.764	22.25	0.150	0.010	1009.0	-0.754	2.422	0.038	1298.0
	前橋	1	-1.264	1.863	1.036	0.164	0.133	168.2	0.987	22.28	0.127	0.017	161.9	-0.829	2.489	0.029	196.6
		2	-1.321	1.807	1.140	0.057	0.045	550.3	0.934	22.48	0.127	0.013	545.7	-0.842	2.495	0.038	648.5
		3	-1.304	1.840	1.092	0.046	0.035	972.2	0.828	22.51	0.123	0.017	966.7	-0.868	2.513	0.051	1158.0
	名古屋	1	-1.364	1.885	1.071	0.145	0.111	212.4	0.969	24.79	0.092	0.020	207.0	-0.993	2.578	0.046	249.3
		2	-1.302	1.946	0.958	0.056	0.042	614.6	0.924	24.16	0.101	0.013	593.3	-0.984	2.575	0.036	753.2
		3	-1.371	1.862	1.104	0.038	0.028	1071.0	0.843	24.93	0.083	0.015	1090.0	-1.038	2.608	0.050	1330.0
	長野	1	-1.496	1.620	1.474	0.206	0.169	186.8	0.978	22.13	0.134	0.026	182.1	-0.791	2.489	0.051	211.9
		2	-1.363	1.833	1.138	0.069	0.055	573.0	0.910	23.15	0.114	0.018	561.0	-0.835	2.515	0.048	664.0
		3	-1.313	1.902	1.026	0.039	0.029	963.9	0.785	23.22	0.107	0.016	947.3	-0.862	2.531	0.055	1171.0
アカマツ	前橋表日本	1	-1.134	1.975	0.792	0.097	0.096	246.7	0.930	23.45	0.105	0.022	262.2	-0.649	2.314	0.033	262.9
		2	-1.208	1.863	0.979	0.033	0.031	757.8	0.800	22.74	0.139	0.013	771.1	-0.631	2.295	0.041	862.5
		3	-1.248	1.843	1.302	0.022	0.019	1329.0	0.635	23.08	0.139	0.013	1331.0	-0.683	2.320	0.084	1529.0
	前橋裏日本	1	-1.017	1.931	0.744	0.191	0.189	160.6	0.925	21.05	0.203	0.039	155.8	-0.582	2.257	0.048	168.6
		2	-0.998	1.862	0.813	0.058	0.056	466.3	0.810	19.91	0.233	0.022	457.8	-0.524	2.220	0.042	540.4
		3	-1.028	1.815	0.890	0.040	0.035	813.3	0.639	19.82	0.243	0.023	810.7	-0.515	2.210	0.057	976.8
	東京	1	-1.316	1.816	1.114	0.177	0.172	204.1	0.972	23.04	0.152	0.020	200.7	-0.666	2.317	0.033	238.8
		2	-1.280	1.795	1.103	0.060	0.058	680.8	0.884	22.55	0.186	0.017	672.8	-0.643	2.295	0.037	763.1
		3	-1.173	1.839	0.965	0.036	0.033	1166.0	0.735	22.03	0.203	0.016	1160.0	-0.633	2.285	0.043	1335.0
	熊本	1	-1.322	1.537	1.453	0.279	0.250	228.3	0.986	20.88	0.241	0.033	239.0	-0.679	2.313	0.037	249.5
		2	-1.110	1.792	0.968	0.059	0.052	672.3	0.901	20.63	0.253	0.017	662.8	-0.683	2.314	0.035	736.1
		3	-1.049	1.833	0.871	0.037	0.030	1127.0	0.753	20.57	0.250	0.019	1149.0	-0.690	2.316	0.044	1319.0
熊本霧島	1	-1.382	1.712	1.291	0.127	0.095	148.7	0.952	24.07	0.117	0.033	155.8	-1.048	2.586	0.075	205.2	
	2	-1.299	1.793	1.127	0.069	0.051	476.1	0.895	23.55	0.140	0.026	487.9	-1.017	2.562	0.057	614.9	
	3	-1.264	1.808	1.080	0.044	0.030	870.4	0.785	23.17	0.158	0.024	880.1	-1.021	2.560	0.067	1072.0	

若干低く0.95であり、共線関係の疑いが認められる。資料2では、0.93-0.87の間に、資料3では0.83-0.71の間にあり、資料1と比べてかなり低い。

(1)式のパラメータ $b$ と $c$ をみると、資料2と資料3については、同一樹種、同一地区内ではほぼ同じ値を示すが、資料1についてはスギは名古屋、高知、ヒノキでは東京、長野、熊本、カラマツでは秋田、長野、アカマツでは前橋表日本、熊本、熊本霧島は、資料2、資料3とは異なった値を示している。ちなみに、 $b$ と $c$ の標準偏差をみると、スギの熊本飫肥以外では、資料1は資料2、資料3よりもかなり大きな値を示している。多重共線性を考慮する必要がない(2)、(3)式の $b$ の値は、資料1、資料2、資料3の間に一定の傾向はなく、同一とみることができる。 $b$ の標準偏差は、(2)式では資料1が資料2、資料3より大きいものが多いが(1)式よりもその差は小さく(3)式では一定の傾向はない。

同一樹種、同一地区、同一資料における(1)、(2)、(3)式のAICをみると、(3)式は常に(1)、(2)式より大であるが、(1)式と(2)式の間には、全体としては、一定の傾向は認められない。しかし、樹種についてみると、スギは(2)式、ヒノキは逆に(1)式、カラマツは秋田以外は(2)式、アカマツは、前橋表日本、熊本、熊本霧島は(1)式で、前橋裏日本、東京は(2)式がAICの値が小さく、精度がよいことになる。

以上のことから、同一の胸高直径について平均的な樹高をもつものを資料として用いる時には、(1)式のパラメータ $b$ と $c$ は、不安定となり、標準偏差も大きくなるが、同一胸高直径に対する樹高の範囲が大きくなるにつれて、 $b$ と $c$ は安定してくる。(2)式と(3)式を用いる時には、このようなことは生じないが、(3)式の精度は悪い。(2)式は多重共線性の心配はなく、スギやカラマツについては(1)式よりも好ましい材積式である。