林統研誌12 '87

GOMPERTZ関数をもとにした人工林の生長モデル*

白 石 則 彦**

Ⅰ. はじめに

複雑多様な個々の林分の生長現象を普遍化するためには，適当な仮説に立脚した数学モデルを構築することが有効である。ここではGOMPERTZ関数を基本として簡単な仮説を定式化し，得られる解によって林分の挙動を考えることにする。

GOMPERTZ関数は箕輪[1]がlog-HITSCHERLICH式と別称したとおり，対数変換された logyがHITSCHERLICH式に従うときyの満たす関数で，べき乗変換によってもその関数形が保存されるという特徴をもつ。林分統計量のあいだには経験的にべき乗関係が成り立つことが多いので，諸々の要素を関連づけて検討するとき，これは望ましい性質である。したがって本報告でも平均胸高直径Dと単位面積当り立木本数Nの関係に限定して考えるが，一般性は失われない。

Ⅱ. 自然間引きモデル

1. DとNが単純なGOMPERTZ関数に従う場合

DとN変化を表わす関数をそれぞれ次のように与える。

$$\frac{1}{D}\frac{dD}{dt}=k_1\ (\ln D_* -\ln D) \qquad (1)$$

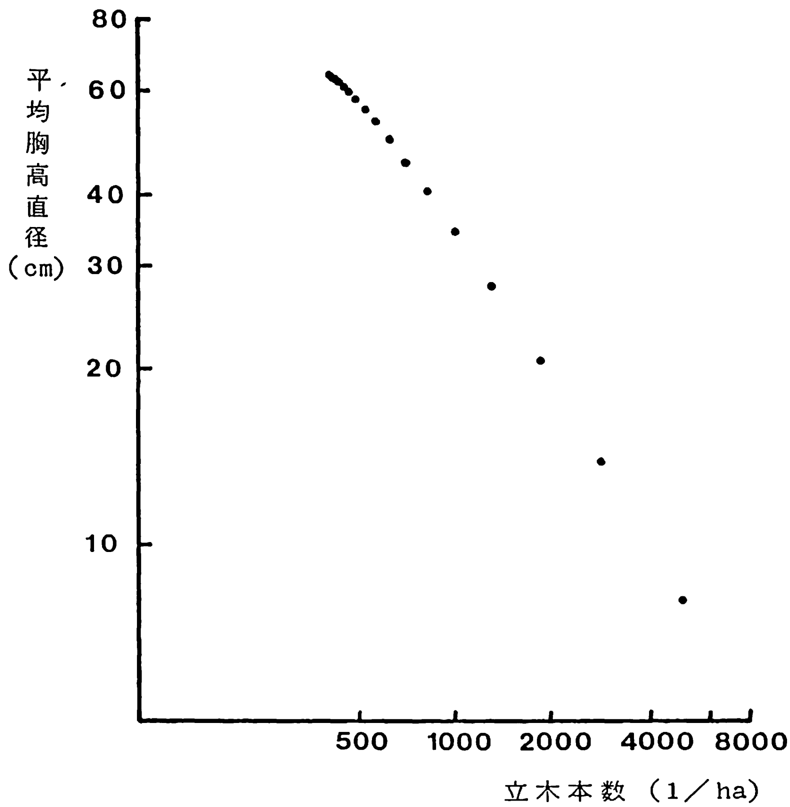
$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}=k_2\ (\ln N_* -\ln N) \qquad (2)$$

ただしD_*，N_*はそれぞれDとNの極限値である。tを消去してlnN～lnD平面で生長軌跡を考えることとし，lnD＝x，lnN＝yとおいて整理する。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{k_2}{k_1}\frac{\ln N_* -y}{\ln D_* -x}$$

---

* Norihiko Shiraishi：The stand growth models based on the GOMPERTZ function
**東京大学農学部 Fac. of Agric., The Univ. of Tokyo, Tokyo 113



図－1　直径と本数がともにGompertz関数に従う場合の林分の生長の軌跡

$D_\infty=64$, $N_\infty=400$, $k_1=0.03$, $k_2=0.025$, $D_0=6$, $N_0=5000$, $t_0=20$yrs

各点は10年間隔で打たれている。

$$\frac{d^2 y}{d x^2}=\frac{k_2}{k_1}\,\frac{\ln N_\infty - y}{(\ln D_\infty - x)^2}\left(1-\frac{k_2}{k_1}\right)$$

k_1，k_2，$\ln D_\infty - x$は常に正で$\ln N_\infty - y$は負であるから生長軌跡の凸凹はk_1とk_2の大小によって決定される。例えば$k_1 < k_2$の場合は密度管理図における自然枯死線のような上に凸の曲線となり，$k_1 = k_2$のとき直線となる。一次，二次導関数に現われたk_1とk_2の比が一定の場合，曲線の形は同一であるが，k_1とk_2の絶対値が大きいほど曲線上を林分が移動する早さは大きくなる。

このモデルの場合，軌跡は始点すなわちDとNがともにGOMPERTZ関数に従い始める点と終点（N_∞，D_∞），そしてk_2/k_1で定められる。単純であるがゆえの限界はあるが，自然間引きに限定しなければ，収穫表にみられるDとNの変化はこのモデルで近似できるなど，生長予測に適用できる範囲はひろい。

2．DとNが互いに影響を及ぼし合う場合

lnN～lnD平面において無間伐林分の生長軌跡は，自然間引きしながらしだいに密度を高め，最多密度曲線へと漸近していく。その際，直径の相対生長率は林齢が高く林分密度が高いほど小さく，本数の変化率は林齢が高く林分密度が低いほど小さいことは，生長に関する一般的傾向として認めてよいであろう。これらの特性をモデル化して微分方程式に表現すると次のようになる。

$$\frac{1}{D}\frac{dD}{dt}=me^{-k1t}+p\left(K_s-\ln N-a\ln D\right) \qquad (3)$$

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt}=ne^{-k2t}-q\left(K_s-\ln N-a\ln D\right) \qquad (4)$$

ただし最多密度曲線を

$$\ln N+a\ln D=K_s$$

で与えるものとする。

（3），（4）式の右辺第1項は相対変化率が指数的に減少することを表わし，これだけでGOMPERTZ 関数の「時間従属」的表現となっている。一方，第2項は（1），（2）式に準じたGOMPERTZ 関数の自律的表現である。したがって（3），（4）式は微分方程式の段階でGOMPERTZ関数の2つの表現を重ね合わせたものとみることができる。その右辺第2項は林分のその時点の状態と最多密度曲線との距離を表わす。すなわちこの距離が同じ場合は異なる林分が等しい密度圧を感じているとみなしているわけで，密度管理図上の等収量比数線に類似した概念といえよう。

D，Nの満たす関数を求めるため，$\ln D=x$，$\ln N=y$とおいて書きなおす。

$$x'=me^{-k1t}+p\left(K_s-y-ax\right)$$
$$y'=ne^{-k2t}-q\left(K_s-y-ax\right)$$

連立微分方程式を解く過程は略すが，例えばyを消去しxについて整理した式は

$$x''+\left(ap-q\right)x'=-\left(k_1+q\right)me^{-k1t}-pne^{-k2t} \qquad (5)$$

となる。ただし，x'，x''などはそれぞれxの時間に関する一次微分，二次微分である。（5）式を解いてxすなわちlnDの関数形として

$$x=\frac{m\left(k_1+q\right)}{k_1\left(ap-q-k_1\right)}e^{-k1t}+\frac{pn}{k_2\left(ap-q-k_2\right)}e^{-k2t}-\frac{C_1}{ap-q}e^{-(ap-q)t}+\ln D_* \qquad (6)$$

が得られる。C_1 はひとつの積分定数で，他のひとつは（6）式で時間を無限大にしたときのxの極限値を考慮し右辺第4項を$\ln D_*$で置き換えた。

（6）式は右辺に exp を含み，かつ $x=\ln D$であるから，Dは exp の肩にまた expののったGOMPERTZ 関数が3つかけあわされた形である。本数Nの減少についても，（3），（4）式の相似性を考えれば単にパラメータを置換するだけで求めることができ，やはり3つのGOMPERTZ関数の積となる。

この結果をもとにすれば，DとNのうち一方がGOMPERTZ関数に従い他方が影響を受けて変化する場合も，このモデルの特殊な場合として論じることができ，同様にGOMPERTZ関数の積が得られる。

生長曲線としてみた場合の（6）式の解析的性質は，多くのパラメータが複雑な式を構成するため，直観的とはいいがたい。連立させた微分方程式（3），（4）式からわかることは，時間無限大でDとNの関係が最多密度曲線上に到達したとき，DもNも変化を完了することである。このことから極限点（N_*，D_*）は最多密度曲線上に存在するのは当然としても，その点に達するまでの経路はパラメータの値と初期条件に応じてさまざまな可能性が考えられる。例えばp，qが相当小さければNとDがそれぞれ単純なGOMPERTZ関数に従う場合（前述）にほぼ一致し，軌跡は上に凸にも下に凸にもなり，また条件によっては最多密度曲線に上側から漸近することも可能である。

以上，確かに（3），（4）式が十分な資料に裏づけられたモデルではないため林分の生長現象をどれだけ表現できるかは未だ不明である。しかしさまざまな経路をとりうることは融通性につながる特徴とも考えられ，植栽本数や生長速度などの条件を限定して不適当なものを除くことにより，妥当な生長曲線が得られると考えられる。

Ⅱ．間伐林分の直径生長モデル

これまで述べてきた自然間引きモデルではNが刻々減少するものとして連続な関数で表現されていた。そこでは限界線としてべき乗式で与えられた最多密度曲線があり，時間無限大のもとでN，Dは極限値に到達し曲線上に収束した。

一方，通常の施業を受けている林分では，最多密度に比較して相当低い林分密度で管理されるため，種内競争による自然間引きは発生せず，本数は間伐以外ではほとんど減少しない。そこで間伐林分についてはNを間伐から次の間伐までのあいだ一定であるとみなし，直径生長モデルを（3）式に準じた形で考えることにする。その場合，密度の基準を最多密度曲線にとる必要はなく，むしろ多くの林分の平均的な密度管理状態を表わす曲線（平均管理曲線と略称）を用いた方が現実的である。

すなわち

$$\frac{1}{D}\frac{dD}{dt}=me^{-kt}+p\,(K-\ln N-a\ln D) \qquad (7)$$

ただし平均管理曲線を

$\ln N+a\ln D=K$

とする。（３）式と（７）式では類似した表記を用いたが，パラメータの値などで両者のあいだに直接の関係はない。（７）式を解くと，lnDに関しGOMPERTZ関数が重ねあわされた

$$\ln D=\frac{m}{ap-k}e^{-kt}+ce^{-apt}+\frac{K-\ln N}{a} \qquad (8)$$

が得られる。

（７），（８）式においてＮは定数として扱われる。この解を数式だけで解釈すれば，時間無限大の時Ｄの極限は平均管理曲線上のそのＮに対する点に収束することを意味する。しかし初めの仮定により，本数が減少するほど長期間を考えることは適用の範囲外である。

このモデルを実際の資料に適用した場合の有効性について，単純なGOMPERTZ関数で近似した場合と比較することにする。

ここでは特徴的な密度管理として，東京大学千葉演習林のヒノキ試験地のうち

① 枯損が生じない範囲で長期間，無間伐で放置された林分

② 何度も間伐を行ってＤとＮの関係がほぼ平均管理曲線を満たすよう施業された林分

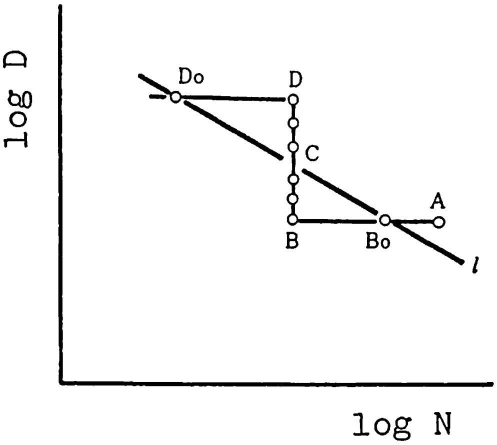
をそれぞれ４ヶ所および３ヶ所選び，その時系列資料を用いた。２通りの密度管理のもとで観測された直径の定期平均生長率（％／年）に対し，指数関数me^{-kt}および（７）式をあてはめて得られたパラメータの値を表－１に示す。ただしGOMPERTZ関数や（８）式を直接直径にあてはめなかったのは，間伐林分で直径の値が不連続となった時の扱いが困難だったからである。

表－１　資料より推定したパラメータの値の比較

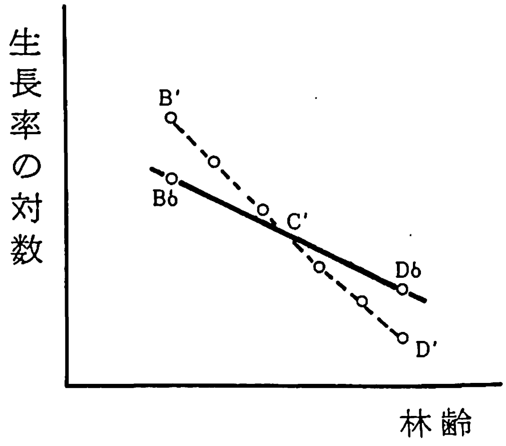
	指数関数		間伐モデル	
資　料	m	k	m	k
長期間放置された林分	8.69	0.0511	3.34	0.0202
何回も間伐された林分	3.17	0.0294	3.25	0.0265
両方を込みにした場合	4.87	0.0367	3.84	0.0272

表からわかるとおり，指数関数をあてはめた場合は密度管理のしかたによって明らかに生長経過が異なっている。それに対し（７）式のモデルでは２通りの密度管理のあいだで差が小さく，両方をこみにして求めた値とも似かよっている。このような結果が得られた理由について，図－２，３を用いて説明する。

図－２はＮとＤの変化を示した図で，$l1$は平均管理曲線を表わし，ＢＤとB_0D_0が①および②の林分の軌跡に対応する。一方，図－３は林齢に対する生長率の変化を示しており，B_0D_0にB_0'



図－２　密度管理の例



図－３　生長率の変化の例

D_0' の生長率が対応しているとする。このような状況のもとでは，無間伐で生長したＢＤの軌跡にはB′ D′ のような生長率が現われるはずである。なぜなら，B_0 点と同じ生育段階でそれより密度の低いＢ点では B_0' よりも大きい生長率B′ が見込め，Ｄ点では逆に D_0' より低くなると考えられるからである。すなわち表－１左に示された①の林分に対するｋ，ｍの大きい値はB′ D′ の生長率を近似していたと考えることができる。

このことから，本数を減らしながら密度を一定に保つ場合と本数一定で密度が高まっていく場合をそれぞれ単純なGOMPERTZ関数で近似すると，後者の方がパラメータｋ，ｍが常に大きいことが推測される。したがって密度の条件が途中で変化する林分に対しては，Gompertz関数はひと組のパラメータを決定することができない。

一方，（７）式のモデルは林齢に依存した B_0' から D_0' に至る変化と，密度の違いに依存したB′ B_0' や D_0' D′ の差を表現する項を含むため，ひと組のパラメータでさまざまな生長経過を記述できる可能性をもっている。また（７）式はＤとＮが平均管理曲線上を変化する場合，Ｄの生長はGOMPERTZ関数となり，べき乗関係を介してＮもまたGOMPERTZ関数に従うことになって，林分収穫表に一般的にみられる性質を包含している。その結果，林分収穫表が少数の資料から調製できることはこのモデルの特徴である。

Ⅳ．おわりに

本論で示した生長モデルは，微分方程式でGOMPERTZ関数を重ねあわせ，解でそれが積になるという共通の性質をもっており，本質的にはすべて箕輪[2,3,4]のlog-Hitscherlich式系の特殊なケースと位置づけられる。

筆者は（７）式のモデルを用いて実際に対象地域の林分収穫表を調製し，おおむね良好な結果を得ている[5]。これは間伐モデルが限られた密度の範囲内では大きな誤差を生まなかったことの傍証とい

えるかもしれない。

最後に本稿をまとめるにあたり，東京大学農学部の箕輪光博博士には貴重なご助言を賜った。ここに記しあつく御礼申し上げる。

参考文献

（1）箕輪光博：林木の生長に関する理論的考察（Ⅰ）log-HITSCHERLICH式の理論．日林誌64：461－467，1982

（2）―――：林木の生長に関する理論的考察（Ⅱ）自己間引きモデルの検討．日林誌65：135－142，1983a

（3）―――：林木の生長に関する理論的考察（Ⅲ）三次元log-HITSCHERLICH式系．日林誌65：417－426，1983b

（4）―――：線形システムとしての林分の生長．林統研誌10：1－24，1985

（5）白石則彦：同齢単純林の生長予測に関する研究．東大演報75：199－256，1986