林統研誌 13 '88

125～127

力学上から見た幹形の表現*
——HOHENADL 断面積式の再評価——

上 野 洋 二 郎**

I．はじめに

幹形 (幹の縦断的形状) についての数学的表現は古くもありまた新しい問題でもある。そもそも幹の形状は，立木固有の遺伝的要素や，吉田[6] の指摘するように林齢やその立木をとりまく立地的要素 (温度，湿度，降水量，風，海抜高，地位等) ならびに位置的要素 (弧立木か林分中の林木) によって，また人為的要素 (間伐，枝打ち等) によっても変化することは誰もが認めざるを得ないところであろう。この複雑に変化する幹形の数学的表現すなわち幹曲線式についての研究は林業の利用上の観点から見ると，幹材積の査定や細り表の作成あるいは利用材積の査定等に供するために行なわれてきたものと考える。従来の幹曲線式は KUNZE 式や吉田式 (3 次多項式) あるいは BEHRE 式に代表されるように実験式的なものが多かったが，最近になって長嶋，末田[1,2,4] によって樹高および直径方向に対する生長曲線式を考え，そこから時間を消去した形での新しい理論的な幹曲線式も考え出されてきている。一方，篠崎等[3] は 20 数年前にパイプモデル説を提案し，幹の太さは何故下に行けば行くほど太くなるのかについての理論的考察を行なった。幹形を考える場合，その構成物である材すなわち非同化部分は力学的にもまた機能的にも同化部分 (葉) を支持していると仮定した篠崎等[3] の考え方は，それなりに納得がいくし，またそのように考えるのは自然であろう。事実，幹形を構成する材部の細胞は樹体の力学的支持と水分通導や養分貯蔵としての機能的な役割を担っているといわれる[5]。

ところで，幹曲線式の問題を考える場合，機能的問題は別にしてこの力学的機能を注目したものに，HOHENADL の提示した無枝部分における樹幹上の各位置の断面積式 (ここでは HOHENADL 断面積式と呼ぶ) がある[6]。本小論ではこのことについて筆者なりに述べ，この式から幹曲線式を求めてこの式の利用性について若干述べてみたい。

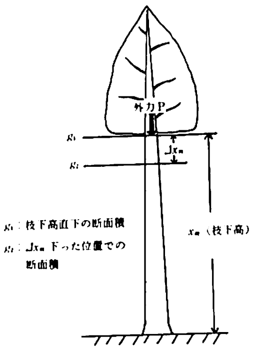
II．力学上から見た幹形の表現

図－1のような立木を考え枝下高 (x_m) 以下については枝葉がないものと仮定し，g_1 をその位置 (正確には最終の枝葉よりすぐ下の位置) での断面積 (m^2 単位) とする。この位置にはそれより上の部分の葉，枝や樹幹等の重さが加っていると考えられるから，これを外力 P (kg 単位) とすると，

---

*A Stem Taper Curve Derived from Mechanical Consideration

**Yojiro UENO, Faculty of Agr., Tokyo Univ. of Agr. Technol., Fuchu, Tokyo 183 東京農工大学農学部



この位置の圧縮応力 σ_1 (kg/m^2) は力学上次式で示される。

$$\sigma_1 = P/g_1 \qquad (1)$$

次に，図一１のように微小な長さ Δx だけ下った位置での断面積を g_2 とし，その位置での圧縮応力を σ_2 とすると

$$\sigma_2 = (P + r \cdot \Delta x g_1)/g_2 = (P + r \cdot \Delta x g_1)/(g_1 + \Delta g_1) \qquad (2)$$

である。ここで，Δg_1 は断面積の増加部分であり，r は１m^3 における重量 (生材比重) で樹幹材においては一定であると仮定する。そして微小な幅 Δx では σ_1 と σ_2 が等しいと仮定すると，

$$P/g_1 = (P + r \cdot \Delta x g_1)/(g_1 + \Delta g_1)$$

が成立する。次に，この関係は枝下高以下のどの位置でも成立すると仮定すると，g_1, Δg_1 は連続変量となり，さらに Δx を dx，Δg を dg とすると次式が成り立つ。

$$P/g = (P + rgdx)/(2 + dg) \qquad (3)$$

これより，

$$Pdg = rg^2dx$$

$$\sigma dg = rgdx \qquad (\text{但し，} \sigma = \mathrm{P}/g) \qquad (4)$$

となる。(4) 式の両辺を σg で割って積分すると，

$$\int \frac{dg}{g} = \int \frac{r}{\sigma} dx$$

となり，結局

$$g = c_1 e^{\frac{r}{\sigma}x} \qquad (\text{但し，} e_1 = e^{c_0}) \qquad (5)$$

が導ける。ここで，枝下高 (x) の位置を原点として考えると，(5) 式は

$$g = g_1 e^{\frac{r}{\sigma}x} \qquad (6)$$

となる。(6) 式は 1922 年 HONENADL が提示した式であり，無枝部分における樹幹上の各位置の断面積 (g) を求めるのに適用されるとしている[6]。さて，樹幹上におけるどの位置の g も円と仮定すれば，$g = \pi(d/2)^2$ であるから，(6) 式は

$$y = d/2 = \sqrt{g_1/\pi}\, e^{\frac{r}{2\sigma}x} = (d_1/2) e^{\frac{r}{2\sigma}x} \qquad (7)$$

(但し，d_1 は枝下高の直径)

となって，枝下高以下の幹曲線式を導ける。また，圧縮応力 σ は P/g_1 でもあるから次式のようにも書ける。

$$y = (d_1/2) e^{\frac{rg_1}{2P}x} \qquad (8)$$

(7), (8) 式は枝下高以下の幹曲線にしか適用できないが，ある程度静力学的に安定な形を形成する式なのではあるまいか。(7), (8) 式はすべてのパラメータが正なる指数関数式であるから，明らかに地上に向って直径が裾が広がる傾向に太っていくことがわかる。そして，その太り方は枝下高より上の枝葉や樹幹の重量に支配され，またそれらの重量は当然時間と共に変わるからそれにともなって幹形が時間的に変化することが十分に考えられるのである。「樹幹は何故下に行けば行く

ほど直径が太くなるのか？」といった素朴な疑問に対して一つの説明になっているものと考えられる。勿論，これはあくまでも力学上のみから考えたものであって，実際各高さでの圧縮応力が果してすべて等しいのかについては今後調べてみる必要があろう。さて，(8)式を $y=\alpha e^{\beta x}$ ($\alpha=d_1/2$, $\beta=rg_1/2P$) として立木での枝下高以下の幹曲線を求める場合，パラメータ α は枝下高の直径 d_1 をテレレラスコープ等の器械を使って測定すればただちに求めることができ，またパラメータ β についても胸高直径の他，数ヶ所の直径をテレレラスコープ等によって測定すれば(誤差を覚悟の上なら最低でも1ヶ所測定すれば良い)求まる。更にその立木の r がわかれば前記の関係から容易に外力 P すなわち枝下高以上の重量が推定出来ることを考慮すると，この式はかなり利用性の高い式とも言えるのかもしれない。ところで，枝下高以上すなわち樹冠内の幹曲線式を以上のような考えから求めるのは相当の困難さが予想される。それは枝と枝の間の幹曲線式を求める場合は上述の考え方が適用されても良いと考えるが，途中に枝葉がある場合は外力 P にその枝葉の重量が新たに加って結果的に圧縮応力が変化し，各位置におけるそれが等しくならないと考えられるからである。このことを考えると，枝と枝の間ならともかくも先端から枝下高までを一つの幹曲線式であてはめるのは相当無理が生じると考えられる。いずれにしても枝下高以下の幹曲線についてこの式をあてはめる場合，その適合性がどうなのかについては今後色々な林木で検証することが当然必要と思う。

以上，HOHENADL の断面積式を基礎にして幹曲線の問題を述べたが，この式がそれなりの論理性を持っていることへの再評価とこの式の有用性についての実証的研究が早急に望まれる。最後にこの小論について諸々の御批判を賜れば幸いである。

参考文献

1) NAGASHIMA, I., YAMAMOTO, M. & SWEDA, T.: A Theoretical Stem Taper Curve (I). J. Jpn. For. Soc. 62: 217～226, 1980

2) NAGASHIMA, I. and INADA, M.: Stem Form Based on the MITSCHERLICH Growth Process. J. Jpn. For. Soc. 69: 10～15, 1987

3) SHINOZAKI, K., YODA, K., HOZUMI, K. and KIRA, T.: A Quantitative Analysis of Plant Form——The Pipe Model Theory I. Basic Analyses. Jap. J. Ecol. 14: 97～105, 1964

4) SWEDA, T.: Theoretical Growth Equations and Their Applications in Forestry. Bull. Nagoya Univ. For. 7 149～260, 1984

5) 東京農工大学農学部林学科編：林業実務必携(第三版)．497～500，朝倉書店，東京，1987

6) 吉田正男：測樹学要論．13～29，成美堂，東京，1930