林統研誌 14 '89　　106～110

RICHARDS 関数の極限形*

内 藤 健 司**

1. はじめに

1988年度の林業統計研究会夏期シンポジウムは京都府立大学のお世話で同大学附属大野演習林で開催された。梶原先生をはじめ京都府立大の諸先生の尽力により三日間にわたったシンポジウムは大友・近藤・大隅先生から学生まで幅広い世代の会員の参加を得て盛会裏に終わり，折りからの不順な天候も天気に恵まれ有意義な一時を過ごす事ができた。紙面をかりて京都府立大学を始め関係者の皆様に御礼申しあげたい。

夏期シンポジウムのテーマは「RICHARDS 成長関数の応用とその周辺」であったが，筆者は上記の題名で話題提供を行ったのでその概要をここに報告する。ただし話題提供以来3カ月余りの時間が経過しているので，内容的に必ずしも当日の話と一致しない面もあるがその点は許していただきたい。

当日の私の話のポイントは RICHARDS 関数の極限形が GOMPERTZ 関数に収束するかどうかという点にあった。言葉は意志を伝達する手段にすぎず，人によりその言葉の解釈が違えば議論は不毛な結果を生むことになる。したがって話の初めに GOMPERTZ, von BERTALANFFY, RICHARDS の原著論文において彼らの提案した関数がどんな物であったのか簡単に要約し，次ぎに RICHARDS 関数の極限形について若干の見解を述べさせてもらった。本報告においてもそのような順序で取りまとめ，最後に最近の私の見解を補足させてもらいたい。

2. GOMPERTZ 関数について

Benjamin GOMPERTZ の論文 (1825) は人間の死亡法則と生命表の新しい計算法に関する物であり 1825.6.9 付けで Francis BAILY に送られ 1825.6.16 付けで査読されている。彼の文章は比較的長文で，さらに私の語学力不足もあって論文の誤読も多々あるとおもわれる。また，この論文に先だって生命表の評価に関する前論文 (未入手) があるらしい。

人間の死因には二種類あり，一つはその人の過去の生活経歴と無関係な偶然に因る物，他方は年齢に伴う老化 (死に抗する能力の減退) であると彼は考えた。年齢と無関係に感染する病があり，感染すれば患者の死に至る割合が年齢と無関係とするならば，その病による年齢階別死亡者

*Asymptotic form of the RICHARDS function

**宇都宮大学農学部

数は母集団の大きさに比例し，ある年に産まれた人口は指数関数的に減少するであろう。しかし，年齢に伴って絶えずその種の病の種が増え続けていくものであれば，生命表に於ける年齢階別生存者数の減少は指数関数より早いスピードで進行するであろう。

そこで彼は一定間隔でとられた年齢階毎の死亡率が等比数列的に増加するという仮定をおいて(1)式の様な減少関数を得た。

$$Lx = d \times g^{q^x} \qquad (1)$$

ただし，Lx はX年齢階の生存者数を表し，d，g，q は定数である。

彼は Northampton, Deparcieux, Carlisle, Sweden の生命表にこの関数式を当てはめ，この関数が様々な生命表に於ける死亡法則をよく表現できる事を示した。(1)式は適当な変換によって二重イクスポネンシャル関数に変換される減少関数であるが，現在林学では増加関数としてもこの関数が用いられている。私の手持ちの文献の限りでは増加関数としてこの関数を初めて用いた論文は，WINZOR (1932) が一番古い。しかし WINZOR 論文中の引用文献にはもっと古そうな文献(未入手)があるようだ。

3. von BERTALANFFY の成長関数及び RICHARDS 成長関数について

BERTALANFFY は Nature の論文 (1949) に先だってドイツ語による関連論文を幾つか発表している。それらの論文は私の不勉強のため未だ読んでいないので，ここでは Nature 論文に基づいて要約する。彼は動物の個体重増加を表現するに際し，ある時点に於ける個体重の増加量はその時点に於ける同化量と異化量の差と考えて(2)式に示す微分方程式を与えた。

$$\frac{dW}{dt} = \eta W^m - \kappa W^n \qquad (2)$$

ここに，W，t は各々個体重，時間を表し η，κ，m，n は定数である。この微分方程式を解析的に解く事は困難であるが，彼は physiology の見地から異化項が個体重に比例すると考えて n を1と固定しその一般解として(3)式を得，RUBNER の surface rule から m の値を2／3以上1未満と考えた。ここに W_0 は初期個体重である。

$$W = (\eta/\kappa)^{\frac{1}{1-m}} \left\{1 - \frac{\kappa}{\eta}(\eta/\kappa - W_0^{1-m})e^{-(1-m)\kappa t}\right\}^{\frac{1}{1-m}} \qquad (3)$$

これに対して，RICHARDS (1959) は m の値を0以上と考えることによりこの関数がより広範な曲線群を表現する事ができ，$m=0$ の場合は MITSCHERLICH 式を，$m=2$ の場合は logistic 式を，$m \to 1$ の場合には GOMPERTZ 式を表現できることを指摘した。日本ではこの拡張された関数を RICHARDS (成長) 関数と呼ぶ人が多い。今年の十月初めにニュージーランドのロトルアで日本・ニュージーランド合同シンポジウムが行われ，Oscar GARCIA の研究室を訪ねる機会を得た。その折りの話題の一つに RICHARDS 関数に関する事があったが，彼は日本人が RICHARDS 関数という表現を用いる事に対して疑問を投げかけた。一般化 (Generalisation) は BERTALANFFY が

既に行っており RICHARDS は解釈の拡張 (Expansion) を行ったにすぎないと言う。私は即座にその根拠を示すよう尋ねたが，多分ドイツ語で書かれた論文にあるだろうというだけで一般化を書いた BERTALANFFY の論文を確認できなかった。この件についてはその内に確認しなければならないと思っているが，RICHARDS 関数という用語を使わない研究者がけっこう外国には居るようだ。

4．RICHARDS 関数の極限形について

ここで言うところの極限形とは，(4) 式に示す RICHARDS 関数に於て $n\to\pm\infty$ とした場合 ($m\to 1$) の関数の極限形の事である。

$$W=A(1-Be^{-kt})^{n} \tag{4}$$

ここに，A，B，k，n は定数であり，(3) 式に示す BERTALANFFY の一般解の定数との関係は (5) 式に示すとおりである。

$$n=\frac{1}{1-m},\quad k=(1-m)\kappa,\quad A=\left(\frac{\eta}{\kappa}\right)^{\frac{1}{1-m}},\quad B=\left(\frac{\eta}{\kappa}-W_0^{1-m}\right)\frac{\kappa}{\eta} \tag{5}$$

はたして RICHARDS 関数の極限形が GOMPERTZ 関数に収束するか否かについては既に上野 (1988) や篠崎ら (1988)，内藤 (1988) の指摘があるが，ここでそれらの議論を整理しておきたい。

RICHARDS はもとの微分方程式を (4) 式に示す一般解のパラメータ A，B，k，n を用いて (6) 式のように変形したうえで極限を考え，それが GOMPERTZ 関数の微分方程式に収束すると主張した。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{dW}{dt}=\lim_{n\to\infty}kW\left\{\frac{(A/W)^{1/n}-1}{1/n}\right\}=kW\cdot\ln\left(\frac{A}{W}\right) \tag{6}$$

彼は極限を考えるに際して k を n (又は m) と独立な定数と見なしていると考えざるを得ない。しかし上野は k が (5) 式に示す様に m の関数になっている事を指摘し，RICHARDS の極限の考え方は片手落ちであり，$m\to 1$ ($n\to\pm\infty$) とした場合 BERTALANFFY の微分方程式の解は指数関数になると批判した。この極限形が指数関数になるという事は篠崎ら (1988) の指摘 (ただし篠崎論文のポイントは RICHARDS 関数は μ 次の logistic 関数である点にあったようにおもわれるが) するところでもある。(2) 式の微分方程式と (4) 式に示されるその解を関連させて考える，換言すると，(5) 式の関係を考慮する限りに於ては上野や篠崎らの指摘は正しいと思われる。しかしながら BERTALANFFY の与えた微分方程式を離れて (4) 式に示す RICHARDS 関数の存在を初めから仮定し，そのパラメータがお互いに独立な定数と考えると，(この事についてはそれなりに議論があろうが) 上野らの批判は解消してしまうであろう。

一方内藤 (1988) は (5) 式に示されるパラメータ間の関係を考慮せず (4) 式を出発点として，A，B，k，n がお互いに独立な定数と考えても，RICHARDS の論理に矛盾の在ることを指摘した。即ち (6) 式が成立するためには式中の (A/W) が n と無関係な定数でなければならないが，(4)

式より明らかな様にそれは $\{1-B\exp(-kt)\}$ の $-n$ 乗となり，(6)式は成立しなくなる。また，(4)式に於て厳密に極限を考えるならばその関数値は0かAにしかならない。以上が夏期シンポでの話の概要であるが，その後この問題について考えたことを最後に付け加えたい。

5．おわりに

実際にパソコン等のグラフィク機能を用いて(4)式のnの値だけを徐々に変化させてそのグラフを描くと，変曲点に於ける(4)式の値がGOMPERTZ関数のそれに近づく事を経験した人は多いと思う。それは結局 n の変化に対応して $t=0$ に於ける初期値を変化させていることになり，その関数のグラフは n の絶対値の増加に伴って無限に時間軸方向へ移動するであろう。ところで初期値 W_0 に対する考え方であるが，初期値はアプリオリに与えられる物でありパラメータの値の変化に左右されないという考え方もあろう(例えば夏期シンポに於ける梅村氏の数値計算例)。その場合(4)式に於て $t=0$ とおけば明らかな様に，W_0 が n，A，B の関数になっていて，n の値に関係なく初期値 W_0 が常に一定になるためには(7)式に示す制約条件が前提とされなければならない。即ち，もはや n と B はお互いに独立ではあり得ない。

$$B=1-(W_0/A)^{1/n} \tag{7}$$

この場合(7)，(4)式は各々(8)，(9)式の様に変形され，$n\rightarrow\pm\infty$ としたときのそれらの極限を考えれば，(8)式は $\ln(W_0/A)$ に収束するので，(9)式に示される変形されたRICHARDS関数は(10)式に示すGOMPERTZ関数に収束する。

$$-nB=\frac{(W_0/A)^{1/n}-1}{1/n} \tag{8}$$

$$W=A\left(1+\frac{-nBe^{-\kappa t}}{n}\right)^n \tag{9}$$

$$W=A\cdot\exp\{e^{-\kappa t}\cdot\ln(W_0/A)\}=A(W_0/A)^{e^{-\kappa t}} \tag{10}$$

内藤(1988)の論文に於ける標本の極値分布の議論では，標本のサイズと無関係に初期母集団の分布関数は一定(B が一定)と考えられており，RICHARDS関数の極限形に関する議論では A，n，B，k がお互いに独立な定数と考えられている点が根本的な違いである。以上から明らかな様に，微分方程式の段階を切り捨てて初めから(4)式の関数形を考え，n の値と無関係に初期値 W_0 が常に一定になるように B が n の関数となっているという立場をとれば，明らかに $n\rightarrow\pm\infty$ としたときのRICHARDS関数はGOMPERTZ関数に収束すると言えよう。

引用文献

GOMPERTZ, B. 1825 : On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies. Transactions of the Royal Society. **XXV**. Part 1 : 513-585

内藤健司　1988：標本における極値の漸近分布関数の誘導．日林誌　70(6)：255 －260

RICHARDS, F. J. 1959: A flexible growth function for empirical use. J. Exp. Bot. **10**: 290-300
篠崎吉郎・山倉拓夫　1988：Richards function について．第 35 回日本生態学会大会講演要旨集：241
上野洋二郎　1988：単木生長モデルから誘導された Gompertz 関数．日林誌　70(3)：104 －110
BERTALANFFY, L. von 1949: Problems of organic growth. Nature 163: 156－158