林 統 研 誌 14' 89

111～115

リチャーズ成長関数とその周辺*

梅 村 武 夫**

I．はじめに

リチャーズ[3] の成長関数は，大隈氏[2] によってわが国林学に紹介されて以来，それまで一般成長曲線として重用されてきたミッチャーリッヒ，ゴンペルツ，そしてロヂスチック曲線をすべて包含するという柔軟性のため，盛んに利用されるようになってきた。しかし予ねてから林学においても議論のあったところであるが，今春あらためて上野・石川[5]，篠崎・山倉[4] 氏らによってリチャーズの成長関数がゴンペルツの成長関数を含むかどうかについて疑義が出された。また内藤氏[1] からは，“含む”ではなく“漸近する”であるという指摘があった。この際リチャーズの成長関数に対する理解を深めようということで，1988 夏期シンポジウム (京都府大) のテーマとしてリチャーズの成長関数が取り上げられることになった。

以下その一端として，これまで主として成長方程式の極限移行によってこの問題が論じてこられたのに対して，成長関数の極限移行から考えてみた。すなわちリチャーズ，その基になったベルタランフィ，また筆者が先に提唱した修正リチャーズ[6] の三つの成長関数について，それぞれがゴンペルツの成長関数へ極限移行する様子を比較した。

なおここでは成長に関する仮説 (法則) を組み込まれた微分方程式を成長方程式と呼び，その一般解と初期値解を混乱の起きない限りともに成長関数と呼ぶことにする。

II．成長方程式

1．ベルタランフィの成長方程式

ベルタランフィは，時間 t における動物の器官の重量 $W(t)$ の成長速度は，それぞれ W のべき乗に比例する合成量と分解量との差によって与えられるとした。さらに実験によって分解量の W のべき指数がほぼ 1 に近いことを明らかにした。その成長方程式は，

$$dW/dt=\eta W^{m}-\kappa W, \qquad 2/3<m<1. \tag{1}$$

ここで $W(t)$：対象の大きさ，　η，κ，m：定数.

によって与えられる。ここではこの (1) 式をベルタランフィの成長方程式と呼ぶことにする。

---

*RICHARDS function and its behavior

**名古屋大学農学部

2．リチャーズの成長方程式

リチャーズは成長関数から逆に (1) 式の形の微分方程式を求め，次式を成長方程式とした。

$$dW_R/dt=\{k/(1-m)\}A^{1-m}W_R{}^m-\{k/(1-m)\}W_R. \tag{2}$$

ここで $W_R(t)$：対象の大きさ，　A，k，m：定数．

3．修正リチャーズの成長方程式

成長速度が，その時点の大きさ $Y(t)$ のべき乗に比例するが，樹齢とともに同化部分の割合が低くなり，指数関数的に減少すると仮定すれば，次のような成長方程式を得る。

$$dY/dt=a\cdot exp(-bt)\cdot Y^m. \tag{3}$$

ここで $Y(t)$：対象の大きさ，　a，b，m：定数．

III．成長方程式の一般解

上の (1) ～ (2) 式の一般解を求めておく。

1．ベルタランフィの一般解

$$W(t)=[\eta/x+C\cdot exp\{-(1-m)xt\}]^{1/(1-m)}. \tag{4}$$

ここで C：積分定数．$2/3<m<1$

2．リチャーズの一般解

リチャーズは上の (4) 式の定数をまとめ，さらに m に対する条件を外し，次式を得た。

$$W_R(t)=\begin{cases}A\cdot\{1-B\cdot exp(-kt)\}^{1/(1-m)}, & 0\leqq m<1,\\ A\cdot\{1+B\cdot exp(-kt)\}^{1/(1-m)}. & m>1\end{cases} \tag{5}$$

ここで A，k：定数，B：積分定数．

なお，(2) 式はこの (5) 式から B を積分定数として逆算された微分方程式である。

3．修正リチャーズの一般解

$$Y(t)=\{D-a(1-m)/b\cdot e^{-bt}\}^{1/(1-m)}. \tag{6}$$

ここで a，b：定数．D：積分定数．

IV．初期値解

上に得られた成長関数はそのまま →1 の極限移行を行えば，発散する。したがってそれぞれの初期値解を求めておく。

1．ベルタランフィの初期値解：$W(0)=W_o$.

$$W(t)=[\eta/x-\{\eta/x-W_0{}^{1-m}\}\cdot exp\{-(1-m)xt\}]^{1/(1-m)},\quad 2/3<m<1.. \tag{7}$$

2．リチャーズの初期値解：$W_R(0)=W_0$.

この場合リチャーズ成長関数 (5) は 1 本の式で表される。

$$W_R(t)=A[1-\{1-\{W_0/A)^{1-m}\}exp(-kt)\}^{1/(1-m)}. \tag{8}$$

3．修正リチャーズの初期値解：$Y(0)=W_0$.

$$Y(t)=[W_0^{1-m}+\{a(1-m)/b\}\cdot\{1-exp(-bt)\}]^{1/(1-m)}. \tag{9}$$

V．極限移行 $m\to 1$

上に得られた成長関数 (7), (8), (9) はいずれも $m=1$ とすれば，1^∞ となり，不定形である。このような場合の $m\to 1$ のときの極限は，まずその対数関数の極限を求めた後，もとに戻すことによって得られる。それぞれの極限関数は次のようになる。

1．ベルタランフィの極限関数

$$\lim W(t)=W_0\cdot exp\{(\eta-\chi)t\}. \tag{10}$$

2．リチャーズの極限関数

$$\lim W_R(t)=A\cdot(W_0/A)^{exp(-kt)}. \tag{11}$$

3．修正リチャーズの極限関数

$$\lim Y(t)=W_0\cdot exp[(a/b)\cdot\{1-exp(-bt)\}]. \tag{12}$$

ここで (10) 式は，明らかに指数関数であり，(1) 式で $m=1$ とした初期値問題の解と一致することも明らかである。

(11) 式と (12) 式は，ゴンペルツの成長関数である。これらは定数パラメタを，

$$a=k\cdot ln(A/W_0),\qquad b=k. \tag{13}$$

としたとき一致し，また (2), (3) 式でそれぞれ $m\to 1$, $m=1$ とした初期値問題の解としても矛盾しない。

VI．数值近似

ベルタランフィおよびリチャーズの成長関数 (一般解) (4), (5) 式が $m\to 1$ のときゴンペルツ成長関数を数値的に近似できることは知られている。それらの初期値解 (7), (8) 式がゴンペルツの成長関数を近似する様子を示したのが表－1，2である。近似の精度は応用上では十分であるが，(7) 式の定数パラメタ η, χ の値は η, $\chi\to\infty$, またリチャーズの成長関数を (5) 式で表したときの B の値は $B\to 0$ となり，ともに不安定であることに注意されなければならない。(5), (8) 式はともにリチャーズの成長関数であるが，両者でゴンペルツの成長関数を近似した場合，前者では m 以外の定数パラメタの値が不安定になるが，後者では一定に保たれるといった違いがみられる。

ベルタランフィ (7) 式，修正リチャーズ (9) 式がそれぞれ指数関数，ゴンペルツの成長関数を近似する様子の表示は省略するが，その際は，定数パラメタは一定値に保たれる。

VII．考察

上の試算からリチャーズの成長関数 (5) 式または (8) 式がゴンペルツの成長関数を近似する様

子は明らかになった。したがって，“リチャーズの成長関数はゴンペルツの成長関数を含むか”の問題については，成長過程の表現のみを目的とする場合には，実用上肯定される。しかし目的によっては内藤氏の指摘のように“含む”，“漸近する”という峻別が必要であろう。少なくとも(4)～(9)式は何れも $m=1$ のとき，そのままの関数型では存在しないことから，一般に考えられている“含む”とは少し意味が違い，“漸近する”というべきであろう。ただ応用上では，“含む”が“近似できる”と同意に解釈されてもさしてとがめられないであろう。

もう一つの疑義は，リチャーズの成長方程式(2)の $m\to1$ の時極限がゴンペルツの成長方程式

$$\frac{dW_R}{dt}=kW_R 1n\left(\frac{A}{W_R}\right). \tag{14}$$

とはならないということであった。リチャーズの証明は，極限値に関する公式，すなわち α を定数として

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha^x-1}{x}=ln\alpha. \tag{15}$$

ここで $\alpha=A/W$,　$x=1-m$.

を根拠としているが，これを(2)式に用いた場合，α が定数とは考えられないということに対する疑問である。

したがってⅤでは成長関数の形でリチャーズ，ゴンペルツの関係を見ることにした。

ただここに用いた手法を用いれば，$\lim\alpha$，$\lim(\alpha'/\alpha)$ が存在する場合には，

$$\lim_{x\to0}\frac{\alpha^x-1}{x}=ln\lim_{x\to0}\alpha. \tag{16}$$

が成り立つことがわかる。したがって(2)式は $m\to1$ のとき，(14)式すなわち，ゴンペルツの成長方程式へ移行することがいえる。このことについては稿を改めて報告したい。

なお(5)，(6)式は，大隈氏の指摘のように，互いに独立と考えるべきものであるから，k はもはや m の関数ではないことに注意されなければならない。

一方修正リチャーズの成長方程式(3)は，$m=1$ のとき，そのままゴンペルツの成長程式となる。しかしその初期値解(9)は，ゴンペルツの成長関数(12)式に“漸近する”に過ぎないことになる。このような場合を峻別すれば，不必要に複雑となるのでここでは省略するが，応用に当たっては，それらの違いを良く理解した上で，目的に適した関数を採用することが効果的である。リチャーズの成長関数とのもう一つの違いは，初期値 y_0 の違いが修正リチャーズでは最後まで残ることである。したがって等結果性(途中経過に拘らず $Y\to$ 一定値)を満たさないが，大きな林木の方が成長が良いという現実を模写するにはより適しているかもしれない。ただし m の値が1を大きく越える場合には，安定性を欠き，y_0 の値によっては特異点が生ずることに注意されなければならない。

なお“修正リチャーズ”の名前に関して，箕輪，内藤両氏より，“ゴンペルツの拡張“と考えるべきであるとのご指摘をいただいた。

成長方程式を基に考えれば，確かにその通りであるが，関数型ではリチャーズに似ているので，ここでは報告時の名称をそのまま用いた。

引用文献

1 内藤健司：標本における極値の漸近分布関数の誘導．日林誌 **70**，225～260，1988

2 大隅眞一：RICHARDS の生長函数とその林木生長への応用．87 回日林論，111～112，1976

3 RICHARDS, F. J.： A flexible growth function for empirical use. Exp. Bot. **10**. 290～300, 1959

4 篠崎吉郎・山倉拓夫：Richards function について．35 回日本生態学会講演要旨集，241，1988

5 上野洋二郎・石川正吾：単木成長モデルから誘導された GOMPERTZ 関数．日林誌 **70**，104～110，1988

6 梅村武夫：リチャーズの関数の極限．36 回日林中支論，75～76，1988

表－1 ベルタランフィ成長関数(7)によるゴンペルツ成長関数(12)の近似

t/m	0.99	0.999	0.9999	GOMP
0	2.0	2.0	2.0	2.0
20	17.6	18.2	18.3	18.3
40	33.5	35.4	35.6	35.6
60	40.7	43.2	43.5	43.5
80	43.1	45.9	46.2	46.2
100	43.9	46.7	47.1	47.1
η	6.2317	60.232	600.23	$\to\infty$
κ	6.0000	60.000	600.00	$\to\infty$

$a=0.19$　$b=0.06$　$W_0=2.0$

GOMP $= lim\ Y(t) = W_0 \cdot exp\ [(a/b)\cdot\{1-exp(-bt)\}]$

表－2 リチャーズの成長関数(8)によるゴンペルツ成長関数(11)の近似

t/m	0.9	0.99	0.999	GOMP
0	2.0	2.0	2.0	2.0
20	13.4	11.9	11.8	11.8
40	28.2	26.3	26.1	26.1
60	38.8	37.5	37.4	37.3
80	44.7	43.9	43.9	43.9
100	47.5	47.2	47.1	47.1
B［(3)式］	0.2752	0.0317	0.0032	$\to 0.0$

$A=50.0$　$k=0.04$　$W_0=2.0$

GOMP $= lim\ W_R(t) = A\cdot(W_0/A)^{exp(-kt)}$.