

RICHARDS 成長関数の応用のために*

大隅 眞一**

1. はじめに

私が Richards 成長関数 (以下 R-関数という) に初めて出会ったのは 1975 年のことであった。1973 年にフランスの NANCY で行われた IUFRO S4.01-4 のシンポジュームの Proc. をみていたら, Rawat, A. S. and Franz, F.⁹⁾ の論文のなかでこの関数のかなり詳しい紹介と単木および林木の成長に対する応用例が示されていたのである。Richards の論文が発表された 1959 年から実に 16 年後のことであった。もともと私は成長関数には強い関心をもっていましたが, それまでに発表された成長関数については, 寺崎式, 吉田式から Mitscherlich 関数 (以下 M-関数という), Logistic 関数 (以下 L-関数という), Gompertz 関数 (以下 G-関数という) にいたるまですべてに満足出来なかった。いずれも樹木の成長をうまく表現出来なかったからである。いつも特定の位置に変曲点がなければならぬ, そのようなものは林学の世界では有用ではない, と思った。もう少し融通のきく式はないものかと思っていたところ, 1961 年に発刊された M. Prodan の *Forstliche Biometrie* のなかに, Mitscherlich の式として次の式が示されていた:

$$Y = A(1 - e^{-cx})^n \quad (1)$$

この式は日本でいわれているミッチャーリッヒ式の拡張形で, いわば一般ミッチャーリッヒ式とでもいうべきものであるが, これだとかなり柔軟にいろいろの場合に対応ができる。この式は樹木の成長にはよく当てはまった。しかしなお不満が残った。その一つはパラメータの性格が明確でなく, したがって成長過程の解析が出来ないこと, もう一つは L-関数との関係がつかないことである。当時, タケノコの成長には L-関数がよく当てはまることが重松義則 (1960) の研究によって明らかにされていたので, L-関数を避けて通ることは出来ないと思った。他方ロジスチック論者の側からは一般ロジスチック理論といわれるものももち出されて, L-関数のもつ硬直性を緩和する試みがなされたが, これは私には理解できなかった。そもそも成長関数なるものは時間の関数として成長の過程を説明しようとするものであるのに, そのパラメータ自体を時間の関数とする考え方は論理の矛盾であると思ったからである。この様な考え方ではいつまでたっても関数の形は具体的に決定されることはない。

Richards の論文¹⁾ を読んで何よりも衝撃的であったのは M-関数, L-関数, G-関数の三関数が

*For the Application of RICHARDS Growth Function.

**Sinichi OSUMI, Member of the Jap. Ass. f. For. Stat.

住所 606 京都市左京区下鴨岸本町 30

30, Shimogamo-kishimoto-cho, Sakyo-ku, Kyoto 606

統一的に説明されており、それらの中間をも含む広範な領域が展開されていたことである。同時に私はこの論文が発表されて既に久しいにもかかわらず、日本の林学界では、僅かに大友栄松が収穫表の調製に関連して触れている以外には、ほとんど知られていなかったのに驚いた。日本だけでなく、世界的にみても林学の分野では余り応用されていないことが分かった。そこで私は早速林業統計研究会誌に紹介すると共に、いろいろなデータに対する当てはめを試みたのであった。Richards はもともとこの関数を“経験的応用のために”といているのであるから、とにかく出来るだけ多くの種類のデータに当てはめてみるのが先決であると思ったからである。最初に問題になったのは計算の為のプログラムの作成であった。はじめは Richards の論文に紹介されていた Stevens の方法をプログラムに組んで行ったが、そのうちに APL 言語を使った Gauss-Newton 法によるプログラムが石川や伊藤によって作られてからは能率があがった。これまでかなり広い範囲にわたって多くのデータに適用した結果、この関数の有用性を確認することが出来たと思っている。

以下、Richards の論文の要点とこれまでの私達の経験によって得られた知見について述べることにしたい。

2. Richards 論文の要点

(1) R-関数の導出：よく知られているように、R-関数は von Bertalanffy の成長モデルを一般化ないしは拡張したものである。von Bertalanffy は動物についてその体重の成長速度は次式で表されるとした：

$$dW/dt = \eta W^m - xW \quad (2)$$

ここに右辺第一項は合成作用の速度を、第二項は分解作用の速度を表している。すなわち彼は合成作用の速度は体重の m 乗に比例するが、分解作用の速度は体重そのものに比例するとする。そして合成作用の速度と比例関係にあるとされる代謝速度に関する過去の研究結果から m の値は $2/3 \leq m \leq 1$ の範囲になければならないとした。 $m = 1$ なるときは成長は指数曲線型となるが、それより小さいときは次式のようなになる：

$$W = (\eta/x - (\eta/x - W_0^{1-m})e^{-(1-m)kt})^{1/(1-m)} \quad (3)$$

Richards はこの von Bertalanffy の考え方に興味を示しながらも、成長速度の導き方に疑問があるとし、また $m > 1$ なる場合が含まれていないことに不満を示して、「もし m が不完全な現在の代謝に関する研究から決められるのではなく、データ自身から経験的に決められるということになれば、von Bertalanffy の成長関数は $m > 1$ なる範囲においてこそ、より広く用いられるにちがない」と考えて式(3)を書き換え次式を導いた：

$$W^{1-m} = A^{1-m} - \beta e^{-kt} \quad (4)$$

ここに $m < 1$ なるとき $\beta > 0$ 、 $m > 1$ なるとき $\beta < 0$ である。彼はこの式を一般関数と呼んだ。さらに彼はそれを次のように書き換えた：

$$m < 1 \text{ なるとき, } W^{1-m} = A^{1-m}(1 - be^{-kt}), \quad b > 0 \quad (5)$$

$$m > 1 \text{ なるとき, } W^{1-m} = A^{1-m}(1 + be^{-kt}), \quad b > 0 \quad (6)$$

彼は式(5)において $m=0$ とおけば、M-関数が得られ、式(6)において $m=2$ とおけば、L-関数が得られることを示し、「それ故に一般関数が幅広い経験的な応用範囲を得るためには、 m の値は1を大きく上回ることが必要である」と述べている。彼はまた、 $m=1$ なるとき一般関数は Gompertz 関数になることを示した。以上において私達が注意しなければならないのは、Richards がその一般関数を導いた過程は von Bertalanffy の成長関数の経験的拡張であるということである。 m を1を超える範囲にまで広げたのも、理論的根拠があつてのことではなく、経験的応用の立場からである。私はこの彼の立場は植物生理学者としてのそれであろうと考えている。もともと $m > 1$ なる範囲にこそ彼の関心はあつたに違いない。さらに注意しなければならないことは、R-関数は von Bertalanffy の成長関数の拡張であるにはしても、それ自体独立した別個の成長関数であるということである。

(2) R-関数の性質：R-関数の特徴的な性質は、既存の M-関数、L-関数、G-関数の三関数、およびそれらの中間型をも含む非常に広い範囲の成長型を表すことが出来るということである。ここに“成長型”というのは、Y-軸上における変曲点の最終到達量に対する相対的位置によって分けられる成長曲線の種類のことである。変曲点の相対的位置は、M-関数では0、G-関数では $1/e$ 、L-関数では $1/2$ に固定されているが、R-関数では固定されていない。したがってどんな型の成長データにも対応することが出来る。Richards はこれについて「1と2の間の範囲にある m の値は、Gompertz から自動反応曲線に至るまでの間の種々の型の曲線を表すことになる。 $m > 2$ とすれば、変曲点の位置は $W=A/2$ を超えて、好きなだけ遠くへもって行くことができる。他方において、もし m が0と1との間にあるときは、曲線の形は単分子反応曲線と Gompertz 曲線との遷移型を示すということが出来る」と述べている。ここで大切なことは、R-関数のカバーする領域は、 $m=1$ を境として、 m の値によって二つに区分されていて、その境界線上に G-関数が位置づけられているということである。私はこの関係を図-1のように表してみた。Mitscherlich-Type (以下、M-型という)、Logistic-Type (以下、L-型という) と名付けたのは M-関数及び L-関数がそれぞれの領域における象徴的存在であるからである。このようにすると二つの領域の関係がはっきりすると思われる。絶対成長速度について Richards は次のように述べている：「絶対成長速度は、これらの曲線のいずれにおいても、いまや次のようになる：

$$dW/dt = kW((A/W)^{1-m} - 1)/(1-m) \quad (7)$$

相対成長速度は、

$$(1/W)(dW/dt) = k((A/W)^{1-m} - 1)/(1-m) \quad (8)$$

式(7)において、 $m=0$ あるいは 2 とすれば、それぞれ単分子反応関数 (M-関数)、自動反応関数 (L-関数) の式になる。 $m=1$ とすると、式(7)、(8)は不定となる。しかし、 $x \rightarrow 0$ なるとき、 $(a^x - 1)/x$ の極限値は $\log_e a$ であるから、 $m \rightarrow 1$ なるときの成長速度は、 $kW \cdot \log_e(A/W)$ となる。

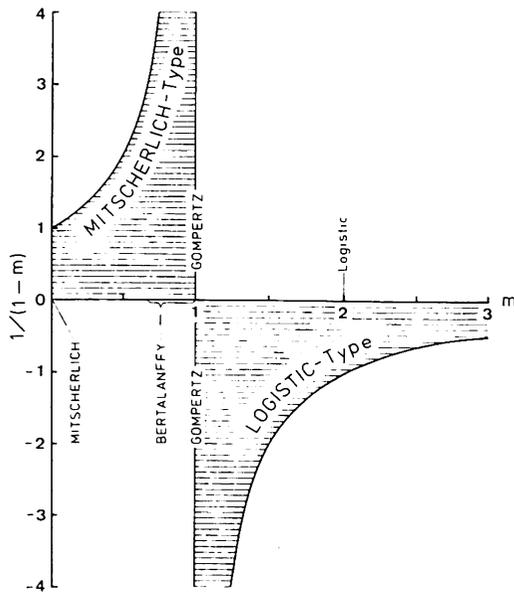


図-1 R-成長関数の領域

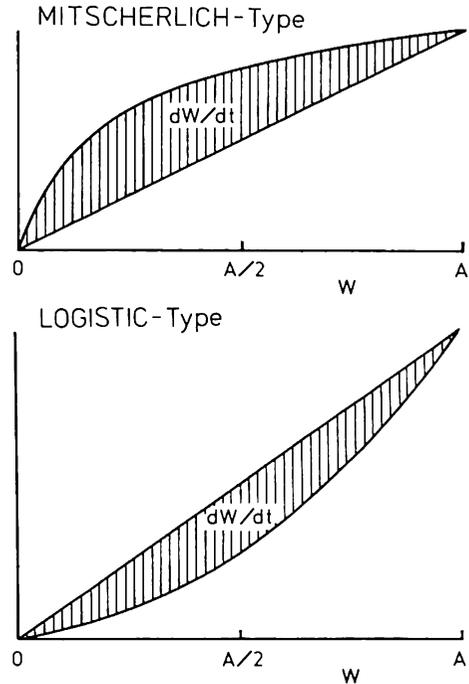


図-2 M-型とL-型の成長構造

これは G-関数における成長速度である。このことは、 $m \rightarrow 1$ するときの一般関数の極限の形が、正しく G-関数であることを示すものである。

式(7)を書き直すと次のようになる：

$$\begin{aligned} dW/dt &= (k/(1-m)) \cdot W(A^{1-m} - W^{1-m})/W^{1-m} \\ &= (k/(1-m)) \cdot A^{1-m} W^m - (k/(1-m)) \cdot W ; (0 \leq m < 1) \end{aligned} \quad (9)$$

または

$$\begin{aligned} &= (k/(m-1)) \cdot W(A^{m-1} - W^{m-1})/A^{m-1} \\ &= (k/(m-1)) \cdot W - (k/(m-1)A^{m-1}) \cdot W^m ; (1 < m) \end{aligned} \quad (10)$$

式(9)はM-型における成長構造を表しているが、これは von Bertalanffy の“開放系”における成長の基礎方程式と同型である。式(10)はL-型における成長構造を表しているが、これは式(9)と対称的である。両式を図示すると図-2のようになろう。これをもってみると、M-型の領域は“開放系”に属する成長の世界であり、対照的にL-型の領域は“閉鎖系”に属する成長の世界であるということが出来るであろう。

(3) パラメータについて：母数 m は、前述のように、変曲点の相対的位置を決定し、それによって成長曲線の型を分類する。母数 A は成長要素の最終到達量を与える。したがってその大きさは対象に固有な性質と環境とによって決定されるものと考えることが出来る。母数 b は $b = (W_0/A)^{1-m} \sim 1$ なる関係にあり、 $t = 0$ における W の大きさを決定する役割をもっている。その値は、M-型の領域においては、 $0 < b \leq 1$ であり、とくに $b = 1$ なるときは $W_0 = 0$ となり、成長曲線は原点を通る。L-型の領域においては、つねに $0 < b$ である。

母数 k についての関係は複雑である。

$$\text{成長速度： } dW/dt = (\mp k A b e^{-kt} / (1-m)) \cdot (1 \pm b e^{-kt})^{m/(1-m)} \quad (11)$$

$$\text{相対成長速度： } (1/W) \cdot (dW/dt) = \mp k b e^{-kt} / ((1-m)(1 \pm b e^{-kt})) \quad (12)$$

ただし、符号は上側が $m > 1$ 、下側が $m < 1$ に対応

これら二つの式において、 k はいずれも複雑に関係しており、その役割を一意的に決めることは困難であるが、ただ k が成長速度に大きく関与していることは明かである。Richards はこれに関して次のような興味ある見解を示した：

式(7)は成長速度を W の関数として示したものであるから、これの W の変域 $0 \sim A$ についての平均を求めると、 $Ak/(2m+2)$ となる。さらに W を A に対する相対量で表すと、上の平均は $k/(2m+2)$ となる。これらはいずれも、成長速度の一種の平均であるから、これによって成長速度を表し、比較することが出来る。しかし、この成長速度の平均は、 W に対するものであって、時間 t に対するものではない。 W が A に達する時間は ∞ であるから、直接時間に対する成長速度の平均を求めることはできない。これに対して、Richards は $Ak/(2m+2)$ が「成長の全期間を通じての、成長速度の重みつき平均である」と解釈することが出来ることを示した。したがって、 $k/(2m+2)$ は W の A に対する相対量の重み付き平均であると解釈することが出来る。この解釈の意義は非常に大きいと思われる。前述のように、Asymptotic function にあっては、直接平均成長速度を求めることは出来ないのであるから、それに代えて、 $Ak/(2m+2)$ および $k/(2m+2)$ を以て、実質的平均成長速度とすることが出来るからである。林学の言葉でいえば、これを以て樹木や林木の全成長期間にわたる実質的な平均成長量とみなすことが出来るということである。したがって、 $T = (2m+2)/k$ とおけば、これは実質的に成長が完了するまでの期間を表すことになる。

最大の成長速度は、 $W = A m^{1/(1-m)}$ において起こり、その大きさは $A k m^{m/(1-m)}$ である。したがって成長曲線の変曲点における相対成長速度は $A k m^{m/(1-m)} / A m^{1/(1-m)} = k/m$ となる。一方、 k/m は「重み付けをそれぞれの時点での成長速度に比例させる場合の、全成長期間を通じての、重み付けられた平均相対成長速度」である。即ち、母数 k/m は、変曲点における相対成長速度でもあり、重み付けられた平均相対成長速度でもあるわけである。このようにして「四つの母数 b 、 m 、 k/m および $Ak/(2m+2)$ は成長曲線を完全に定める」ことになる。

(4) Allometry との関係：Richards はその論文の最後の部分に於て、「もし現実のデータに、この曲線群を適用することについての正当性を求められるならば、それはおそらくは二つの相関連する成長要素、例えば葉の長さとの間に、それらの成長過程を通じて頻繁に見いだすことの出来る相対成長関係 (Allometric relationship) ($Y = pW^q$) の中に求めることが出来るであろう。容易にみられるように、もし W が当該曲線群の一つに従う成長要素であるとすれば、それと allometrical な関係にある任意の他の要素 Y は、その成長曲線として、同じファミリーの異なったメンバーを選ばねばならない」と述べている。相対成長法則は、生物の成長現象に広く認められているが、R-関数は、この法則を適用してもその形を変えないということをいっているのである。R-関数は本来は個体の全体重量に対して導かれたものであるにしても、いまや相対成長法則を介

して、個々の器官の重量等の部分量や、体積、長さ、面積等、ディメンジョンを異にする量に対しても適用することが出来るということを示している。これは成長関数として大きな特長である。ここで注意しなければならないのは、先に述べたとおり、M-型およびL-型の二領域ならびにそれらを隔てるG-関数の“壁”は、たがいに不可侵であって、それぞれの内部で、それぞれのファミリーを形成しており、相対成長法則は同一のファミリー内では働くが、ファミリー間では作用し得ないということである。このことは応用上重要な意味をもっている。たとえば幹材積の成長がM-型のR-関数で表されるとすれば、それと相対成長関係またはべき乗関係にある樹高、基準直径、基準断面積等の量は、すべてM-型の成長関数に従うべきであって、L-型の関数に従うことはなく、反対に、葉の長さの成長がL-型の関数に従うとすれば、これと相対成長関係にある葉の重量もまたL-型に従うということである。

3. 応用経験からの知見

R-関数は、前述のように、植物の成長量を合成(同化)量と分解(呼吸)量との差としてとらえるという合理的な考えの上に導かれ、解析的にも優れた性質をもっているといえるが、植物生理学的に完全な裏付けを得ているわけではなく、植物生理学自体もまた成長を量的に十分説明し得るまでには至っていないように思われる。その意味ではR-関数もまた一種の経験関数である。したがってそれが有用なものとして認知されるためには、出来るだけ多くの種類の、出来るだけ多数の成長データに当てはめてみる努力が必要である。以下、私達の今日までに行った適用例のうち代表的なものに関連させて知見を述べたい。

(1) 樹木の幹の成長⁽¹⁾⁽⁴²⁾：表-1は大野演習林内のスギの樹幹解析に基づく成長データに対して、表-2は九州林産社有林内のヤブクグリスギの樹幹解析に基づく成長データに対して、それぞれR-関数を当てはめた例である。また、図-3および図-4はそれぞれ代表的なものの1例を選んで図示したものである。当てはめに際しては、グループ毎、成長要素毎に m の値を共通とした。それは同種の資料については成長曲線の型はほぼ同じとみなしてよいからであり、かつ m の推定が不安定になり勝ちであるからである。図-3、図-4から分かるように成長曲線の当てはまりは良好である。 m の値はグループ間で異なり、またそれぞれのグループ内では、成長要素間で異なる。大野スギでは直径成長の m の値が小さくてほとんど0に近く、したがって曲線はM-関数のそれに近くなっている。これに対してヤブクグリスギでは、いずれの成長要素についても、 m の値は非常に大きいことが分かる。 m の値にみられるこの大きな差は成長型に大きな差があることを意味している。図-5は $A=1$ として、 $w=W/A$ の成長曲線を示したものであるが、グループ間の成長過程の差が歴然としている。ヤブクグリスギは大野スギに比べて成長が速く、早熟であることが分かる。このことは表-1、および表-2の“組み合わせられた母数”にもはっきり示されている。たとえば $k/(2m+2)$ は A を1とした場合の相対量 $w=W/A$ の実質的平均成長量を表すが、ヤブクグリスギの方が大野スギよりもはるかに大きいことが分かる。また成長率の実質的

表-1 大野演習林のスキの成長

No.	Factor	Data size	m	A	k	SSR	$\frac{Ak}{2m+2}$	$\frac{k}{2m+2}$	$\frac{k}{m}(\%)$	$\frac{2m+2}{k}$
No.1	H(m)	10	0.3587	29.50	0.04064	0.28045	0.4412	0.01496	11.3	66.9
	D _{0.9} (cm)		0.0132	36.73	0.02570	1.11042	0.4658	0.01268		78.8
	G _{0.9} (cm ²)		0.5066	1162	0.02367	517.31	9.128	0.00786	4.7	127.3
	V(m ³)		0.7048	1.6715	0.02933	1.216×10 ⁻³	0.01438	0.00860	4.2	116.2
No.2	H(m)	9	0.3587	30.16	0.03842	0.40308	0.4264	0.01414	10.7	70.7
	D _{0.9} (cm)		0.0132	88.10	0.00939	0.94565	0.4082	0.00463		215.8
	G _{0.9} (cm ²)		0.5066	7183	0.00850	598.63	20.263	0.00282	1.7	354.5
	V(m ³)		0.7048	9.7147	0.01456	1.064×10 ⁻³	0.04148	0.00427	2.1	234.2
No.3	H(m)	10	0.3587	27.12	0.04132	0.14857	0.4124	0.01521	11.5	65.8
	D _{0.9} (cm)		0.0132	50.08	0.01565	1.18743	0.3868	0.00772		129.5
	G _{0.9} (cm ²)		0.5066	2435	0.01350	680.36	10.909	0.00448	2.7	223.2
	V(m ³)		0.7048	3.0608	0.02037	3.323×10 ⁻⁴	0.01829	0.00597	2.9	167.4
No.4	H(m)	9	0.3587	27.04	0.03664	0.01741	0.3646	0.01348	10.2	74.2
	D _{0.9} (cm)		0.0132	37.29	0.02321	0.37460	0.4271	0.01145		87.3
	G _{0.9} (cm ²)		0.5066	1079	0.02346	349.36	8.401	0.00779	4.6	128.4
	V(m ³)		0.7048	1.6920	0.02559	2.772×10 ⁻⁴	0.01270	0.00750	3.6	133.2
No.5	H(m)	10	0.3587	29.35	0.03953	0.42967	0.4270	0.01455	11.0	68.7
	D _{0.9} (cm)		0.0132	47.68	0.01714	0.59096	0.4033	0.00846		118.2
	G _{0.9} (cm ²)		0.5066	1713	0.01768	181.20	10.051	0.00587	3.5	170.4
	V(m ³)		0.7048	2.9025	0.02209	1.423×10 ⁻⁴	0.01880	0.00648	3.1	154.4

表-2 ヤブクグリスキの成長

No.	Factor	Data size	m	A	k	SSR	$\frac{Ak}{2m+2}$	$\frac{k}{2m+2}$	$\frac{k}{m}(\%)$	$\frac{2m+2}{k}$
No11	H(m)	8	0.6205	23.17	0.06564	0.15360	0.4693	0.02025	10.6	49.4
	D _{0.9} (cm)		0.8223	21.06	0.19176	0.43781	1.1081	0.05261	23.3	19.0
	G _{0.9} (cm ²)		0.9067	348.24	0.18953	333.51	17.308	0.04970	20.9	20.1
	V(m ³)		0.8796	0.4208	0.09464	3.061×10 ⁻⁴	0.01059	0.02518	10.8	39.7
No12	H(m)	7	0.6205	26.12	0.05841	0.12518	0.4707	0.01802	9.4	55.5
	D _{0.9} (cm)		0.8223	23.57	0.15056	0.07714	0.9737	0.04131	18.3	24.2
	G _{0.9} (cm ²)		0.9067	438.25	0.14754	84.637	16.956	0.03869	16.3	25.8
	V(m ³)		0.8796	0.5972	0.08225	4.276×10 ⁻⁵	0.01307	0.02188	9.4	45.7
No13	H(m)	7	0.6205	25.14	0.06651	0.08285	0.5159	0.02052	10.7	48.7
	D _{0.9} (cm)		0.8223	27.19	0.16059	0.08544	1.1980	0.04406	19.5	22.7
	G _{0.9} (cm ²)		0.9067	583.22	0.15742	99.463	24.076	0.04128	17.4	24.2
	V(m ³)		0.8796	0.7301	0.09011	1.377×10 ⁻⁴	0.01750	0.02397	10.2	41.7
No14	H(m)	8	0.6205	25.05	0.06467	0.14188	0.4998	0.01995	10.4	50.1
	D _{0.9} (cm)		0.8223	26.96	0.16364	0.33018	1.2105	0.04490	19.9	22.3
	G _{0.9} (cm ²)		0.9067	573.67	0.16022	370.82	24.103	0.04202	17.7	23.8
	V(m ³)		0.8796	0.6980	0.09138	1.794×10 ⁻⁴	0.01697	0.02431	10.4	41.1
No15	H(m)	7	0.6205	24.26	0.06336	0.16241	0.4743	0.01955	10.2	51.2
	D _{0.9} (cm)		0.8223	25.08	0.15101	0.27513	1.0392	0.04143	18.4	24.1
	G _{0.9} (cm ²)		0.9067	493.68	0.14912	327.42	19.305	0.03910	16.4	25.6
	V(m ³)		0.8796	0.5751	0.08690	1.446×10 ⁻⁴	0.01329	0.02312	9.9	43.2

平均である k/m の値も、樹高を除きヤブクグリスギの方がはるかに大きいことが分かる。さらに実質的成長年数を表す $(2m+2)/k$ の値はヤブクグリスギのほうがはるかに小さいといえる。たとえば No.12 の材積成長ではその成長を完成するのに約 46 年でよいのに、大野スギの No.5 では 154 年かかることが分かる。このことは、ヤブクグリスギで短伐期施業を採ることは正しいが、大野スギのような裏日本系のスギでは誤りであることを意味している。なお、表-1 において、直径に対する k/m の数字はほとんど意味をもたない。それは m の値が 0 に近いからである。

(2) アカマツ、クロマツの新梢の伸長及びモウソウチクのタケノコノ伸長⁴¹⁾⁴²⁾：表-3 はアカマツの新梢の伸長データに R-関数を当てはめた例である。表-4 はクロマツの新梢の伸長データに当てはめた例である。図-6 はその一部を示したものである。いずれの当てはめにおいても m はそれぞれのグループ内で共通とした。アカマツ、クロマツともに m の値は 1 を大きく上回っている。クロマツの方がアカマツよりも少し大きいといえる。伸長率はいずれも 5~6%、伸長期間は 50~60 日であることが分かる。表-5 および図-7 はモウソウチクのタケノコの伸長データに対する当てはめの例である。 m の値はクロマツの場合にはほぼ等しく、1 を大きく超えている。伸長率は 7~9%、伸長期間は 40 日前後と見られる。

(3) 広葉樹の葉の伸長⁵²⁾：表-6 は広葉樹の葉の長さ方向の伸長データに対して R-生長関数

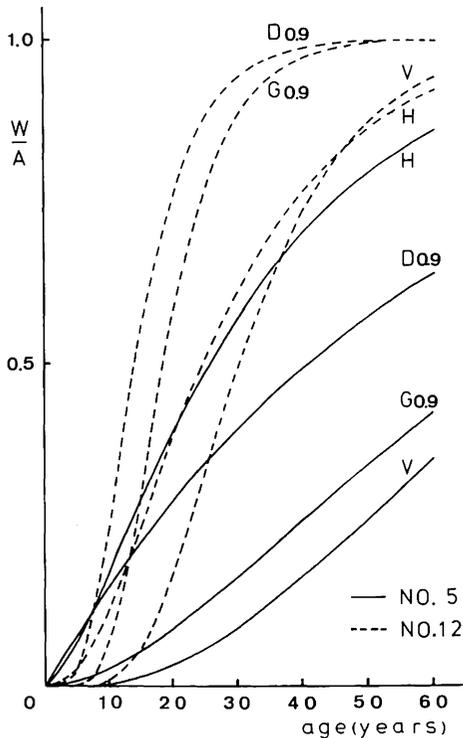


図-3 大野演習林のスギの成長

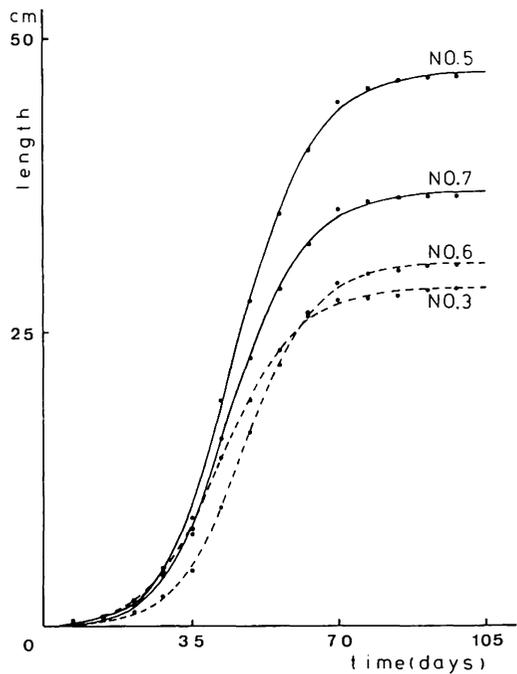


図-4 ヤブクグリスギの成長

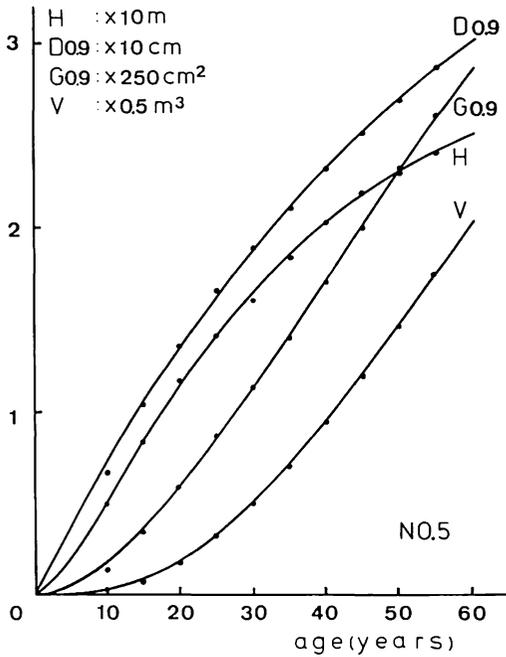


図-5 大野演習林のスギとヤブクグリ
スギの成長過程の比較

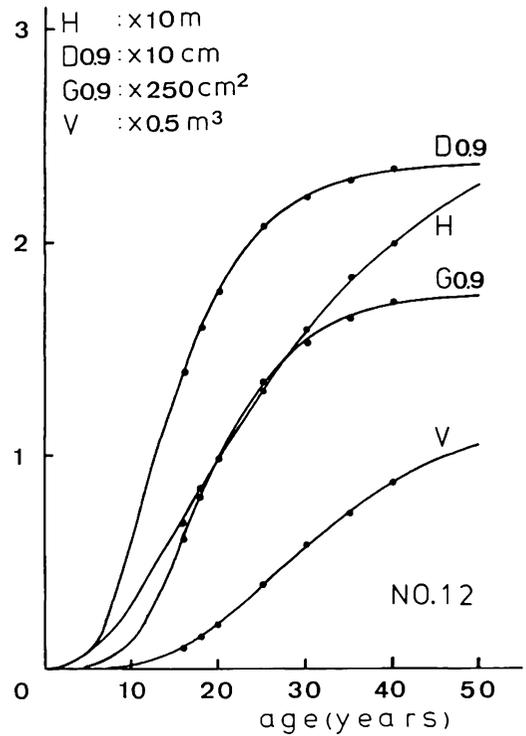


図-6 アカマツ（実線）及びクロマツ
（破線）の新梢の伸長成長

を当てはめたものである。図-8はそのうちの2種について図示したものである。いずれの場合も m の値は2を超えてかなり大きな値をとっている。なかにはホオノキのように6を超えるものもみられる。樹種によって明らかに差がみられる。この例では b の値が計算されており、なかにはホオノキやアオキのようにかなり大きな値をとるものもみられる。それに応じて初期値 W_0 の値が計算されている。これは伸長開始直前の葉芽の長さに対応する。 $(2m+2)/k$ の値によって実質的に伸長を終るまでの日数が与えられている。 t_i は伸長速度が最大になる時を表している。

(4) 成長と伸長：以上の結果にみられるように、スギ樹幹の成長はM-型であるのに対して、アカマツ、クロマツの新梢、モウソウチクのタケノコの伸長、広葉樹の葉の伸長はいずれもL-型に属している。前者は、開放系において、永年植物としての樹木が、同化作用によって生産した物質を蓄積して、自らの体量を増加し続ける経年的な生産成長であると考えることができる。これに対して後者は、いずれも新梢あるいは葉という一つの器官の形成・伸長の過程であると見なすことができる。それは“生産”ではなく、個体内における物質の移動・転換による器官の新しい形成とみなすことができる。それは年ごとに、ある定まった期間内に完了するものである。

以上の事実と、R-関数における相対成長法則の関係を考え合わせれば、樹木の幹の経年成長は“一般に”M-型($0 \leq m < 1$)であり、一つの器官としてのその年内成長は“一般に”L-型($1 < m$)であると推量することが出来るのではなからうか。

表-3 アカマツの新梢の伸長成長

No.	Data size	m	A	k	b	SSR	$\frac{Ak}{2m+2}$	$\frac{k}{2m+2}$	$\frac{k}{m}(\%)$	$\frac{2m+2}{k}$	W_0
No. 1(cm)	14	1.6188	45.82	0.0976	55.20	6.2608	0.8538	0.01863	6.0	53.7	0.07
No. 2(cm)	14	1.6188	49.40	0.0913	31.06	6.4847	0.8611	0.01743	5.6	57.4	0.18
No. 3(cm)	14	1.6188	49.92	0.0872	37.04	5.1994	0.8311	0.01665	5.4	60.1	0.14
No. 4(cm)	14	1.6188	43.73	0.0877	53.51	4.9470	0.7322	0.01674	5.4	59.7	0.07
No. 5(cm)	14	1.6188	47.34	0.1007	54.35	3.0794	0.9102	0.01923	6.2	52.6	0.07
No. 6(cm)	14	1.6188	38.96	0.0972	59.06	4.4431	0.7230	0.01856	6.0	53.9	0.05
No. 7(cm)	14	1.6188	37.05	0.1038	55.58	2.1161	0.7343	0.01982	6.4	50.4	0.05
No. 8(cm)	14	1.6188	52.20	0.0869	29.92	5.7302	0.8661	0.01659	5.4	60.3	0.20

表-4 クロマツの新梢の伸長成長

No.	Data size	m	A	k	b	SSR	$\frac{Ak}{2m+2}$	$\frac{k}{2m+2}$	$\frac{k}{m}(\%)$	$\frac{2m+2}{k}$	W_0
No. 1(cm)	14	1.7784	40.16	0.0892	49.63	2.5750	0.6447	0.01605	5.0	62.3	0.26
No. 2(cm)	14	1.7784	47.77	0.0941	74.66	6.4527	0.8089	0.01693	5.3	59.0	0.18
No. 3(cm)	14	1.7784	28.81	0.1060	63.72	1.3115	0.5496	0.01908	6.0	52.4	0.14
No. 4(cm)	14	1.7784	44.70	0.0910	77.06	6.5945	0.7320	0.01638	5.1	61.1	0.16
No. 5(cm)	14	1.7784	35.24	0.1084	170.95	2.0277	0.6874	0.01951	6.1	51.3	0.05
No. 6(cm)	14	1.7784	30.93	0.1138	166.26	1.1063	0.6334	0.02048	6.4	48.8	0.04
No. 7(cm)	14	1.7784	34.75	0.1071	94.45	1.6317	0.6698	0.01927	6.0	51.9	0.10
No. 8(cm)	14	1.7784	51.63	0.0958	88.17	5.8285	0.8901	0.01724	5.4	58.0	0.16
No. 9(cm)	14	1.7784	42.51	0.1002	111.18	3.4955	0.7665	0.01803	5.6	55.4	0.10
No. 10(cm)	14	1.7784	51.76	0.0883	57.35	5.5856	0.8225	0.01589	5.0	62.9	0.28

表-5 モウソウチクのタケノコの伸長成長

No.	Data size	m	A	k	b	SSR	$\frac{Ak}{2m+2}$	$\frac{k}{2m+2}$	$\frac{k}{m}(\%)$	$\frac{2m+2}{k}$	W_0
No. 1(m)	19	1.7726	11.68	0.1642	8.37	0.4613	0.3458	0.02961	9.3	33.8	0.65
No. 2(m)	20	1.7726	15.95	0.1457	7.45	0.9557	0.4191	0.02627	8.2	38.0	1.01
No. 3(m)	21	1.7726	16.15	0.1327	7.10	0.9340	0.3865	0.02393	7.5	41.8	1.08
No. 4(m)	18	1.7726	14.15	0.1490	10.77	0.6573	0.3802	0.02687	8.4	37.2	0.58
No. 5(m)	18	1.7726	13.40	0.1296	5.02	0.4260	0.3132	0.02337	7.3	42.3	1.31
No. 6(m)	18	1.7726	15.21	0.1868	5.83	0.4241	0.3752	0.02467	7.7	40.5	1.26
No. 7(m)	18	1.7726	14.08	0.1536	5.40	0.5640	0.3900	0.02770	8.7	36.1	1.27

4. おわりに

R-関数は応用的観点からは優れた成長関数である。その理由は同関数が適応性、解析性において優れているからである。その優位性は von Bertalanffy の成長関数の経験的拡張として、成長を合成と分解の差の集積過程として捉えるという基本的な考え方を貫きながら、パラメータ m に課せられていた制限を取り払って m のとりうる範囲を $0 \leq m < 1$ および $1 < m$ に拡大したことに基づいている。

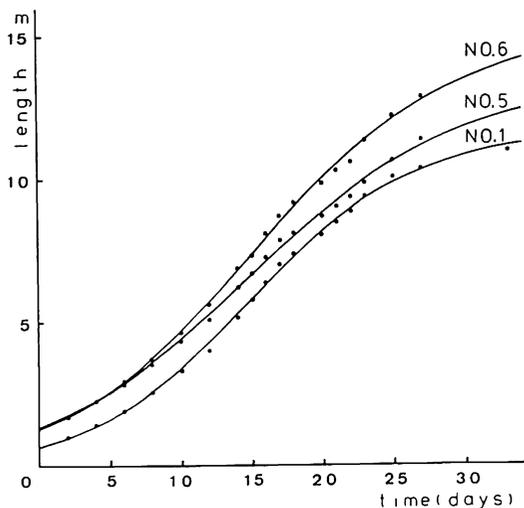


図-7 モウソウチクのタケノコの伸長成長

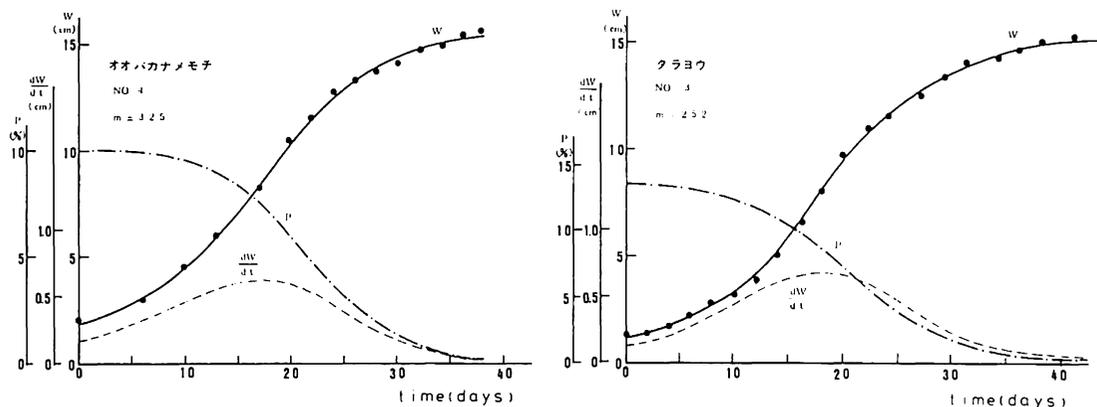


図-8 広葉樹の葉の伸長成長

R-関数はパラメータ m の値により、成長の型に関して、 $0 \leq m < 1$ なる領域 (M-型) と、 $1 < m$ なる領域 (L-型) とに分けられる。二つの領域の境界に G-関数が位置づけられる。二つの型の成長構造はそれぞれ式 (9) および式 (10) によってあらわされる。すなわちそれらは $m=1$ に関して対称的である。

樹木の幹の成長は、器官としての一年毎の年内成長と、それらの累積過程としての経年成長とに分けて考察することができる。後者が M-型に属することは実証された。前者は L-型に属するものと推量されるが、確認されていない。この実証は重要な課題である。もしそうであるとすると、幹は年々 L-型の成長を繰り返しながら生涯的には M-型の成長を遂げるものと考えることが出来る。年内成長と経年成長とが成長構造を異にするということは興味深いことであるが、これに対しては植物生理学からの説明を期待したい。なおこれに関連して、これまで森林生態学

表-6 広葉樹の葉の伸長成長

No.	A (cm)	m	k	b (-)	W ₀ (cm)	t ₁ (day)	$\frac{2m+2}{k}$ (day)	SSR	
オオバカナメモチ	1	15.5	3.95	0.2777	463.5	1.9	18.2	35.7	0.87
	2	15.2	3.69	0.2822	520.9	1.5	18.7	33.2	2.31
	3	13.0	4.15	0.2781	552.8	1.8	18.6	37.1	0.40
	4	15.3	3.27	0.2303	145.9	1.7	18.1	37.0	0.34
	5	14.8	3.18	0.2125	109.7	1.7	18.4	39.3	0.63
	6	15.8	4.29	0.2949	760.8	2.1	18.5	35.9	0.71
	7	15.9	2.31	0.1681	22.9	1.4	17.0	39.3	0.68
	8	17.0	3.64	0.2328	187.8	2.3	18.3	39.8	0.91
	9	14.3	3.86	0.2534	303.7	1.9	18.4	38.4	0.55
	10	15.2	4.02	0.2687	625.3	1.8	19.8	37.3	0.79
ホオノキ	1	32.4	5.65	0.5881	$\times 10^3$ 27.9	3.6	14.8	22.6	5.58
	2	33.2	4.69	0.5470	7.5	3.0	13.9	20.8	3.95
	3	34.4	5.28	0.5950	38.0	2.9	15.3	21.1	6.58
	4	24.8	5.51	0.6322	56.8	2.2	14.9	20.1	3.09
	5	30.1	6.79	0.7077	107.4	4.1	13.9	22.0	3.16
	6	28.6	4.19	0.4369	1.2	3.1	13.6	23.8	3.87
	7	22.9	6.10	0.6878	92.5	2.4	14.3	20.6	1.53
アラカン	1	8.4	3.00	0.3736	13.0	2.2	5.0	21.4	0.06
	2	10.7	3.76	0.4120	38.5	2.8	6.4	23.1	0.59
	3	11.6	2.72	0.2890	10.4	2.8	6.2	25.8	0.54
	4	10.6	4.78	0.5458	145.9	2.8	6.7	21.2	0.18
	5	9.7	3.91	0.5822	46.7	2.6	4.8	16.9	0.41
	6	11.1	4.82	0.4684	138.1	3.1	7.7	24.8	0.30
	7	9.9	3.17	0.4024	27.3	2.1	6.3	20.7	0.28

No.	A (cm)	m	k	b (-)	W ₀ (cm)	t ₁ (day)	$\frac{2m+2}{k}$ (day)	SSR	
タラヨウ	1	13.4	2.80	0.2075	50.8	1.5	16.1	36.6	0.87
	2	15.8	2.75	0.2404	124.0	1.0	17.7	31.2	0.93
	3	15.0	2.52	0.2103	72.0	0.9	18.3	33.5	1.18
	4	14.8	2.52	0.2093	69.7	0.9	18.3	33.7	1.25
	5	14.2	2.40	0.2009	43.6	0.9	17.1	33.8	1.35
	6	14.0	2.12	0.1716	26.0	0.7	18.3	36.4	1.30
	7	14.8	2.85	0.2462	128.2	1.1	17.2	31.3	0.52
	8	15.4	2.21	0.1998	41.3	0.7	17.7	32.1	1.06
	9	9.6	2.08	0.1799	12.3	0.9	13.5	34.2	0.89
	10	12.5	2.50	0.2046	58.4	0.8	17.9	34.2	1.63
ユズリハ	1	23.4	3.87	0.2866	196.0	3.7	14.6	34.0	1.46
	2	23.0	3.77	0.2620	114.9	4.1	14.2	36.5	2.53
	3	20.3	2.52	0.1854	12.7	3.6	11.0	38.0	1.07
	4	22.8	2.85	0.2046	25.1	3.9	12.9	37.6	0.85
	5	25.9	3.94	0.2985	310.4	3.7	16.2	33.1	1.09
	6	19.2	3.31	0.2451	44.3	3.7	11.4	35.2	1.47
	7	19.3	3.54	0.2585	64.5	3.7	11.7	35.1	0.65
	8	15.9	2.72	0.1665	12.0	3.6	8.9	44.7	1.67
	9	17.3	3.17	0.2175	30.3	3.5	10.2	38.4	0.85
アオキ	1	14.9	5.84	0.3057	$\times 10^4$ 26.2	1.1	35.7	44.7	0.88
	2	19.4	5.08	0.2924	19.4	1.0	36.8	41.6	1.37
	3	21.2	5.69	0.3203	62.3	1.2	36.8	41.8	1.66
	4	16.8	4.40	0.2349	1.1	1.1	34.6	46.0	1.16
	5	16.1	4.99	0.2674	4.6	1.1	35.0	44.8	2.54
	6	20.7	5.69	0.3091	64.1	1.2	38.3	43.3	1.88
	7	24.0	4.61	0.2826	8.9	1.0	35.8	39.7	1.44

者を中心として樹木の経年成長もまた L-関数に従うとされてきたが、これは、植物生態学者の主張する L-関数に代表されるように、L-型の成長をするものと考えられる草本植物に対する成長理論を安易に樹木や林木の世界にもち込んだものであって、過ちであったということができよう。

幹の経年成長に限定するなら、 m は 0 と 1 との間で、樹種により、品種により、個体により、また直径、樹高、体積などの成長要素によっていろいろな値をとることが知られる。すなわち成長の型は場合によって一様ではないということである。これはきわめて自然のことと思われる。型の定まった M-, G-, L-関数が、これに対して殆ど、または全く役立たないことは今や明らかである。一つの関数に固執して、頑なに狭あいな領域に閉じこもるよりも、幅広い適合性を示す R-関数を正しく理解し、応用していくことが、林学における成長研究の拓かれた道であろう。

本稿では R-関数の基礎的な面に関して述べるにとどまり、林分の成長に対する応用的な研究の展開についてまでふれるだけの余裕はなかった。しかしこの分野においても、最近多くの優れた研究がなされている。それらについては、参考文献を参照されたい。

参考文献(発表年代順)

- 1) RICHARDS, F. J.: A flexible growth function for empirical use. *J. Exp. Bot.* 10: 290~300, 1959
- 2) CHAPMAN, D. G.: Statistical problems in dynamics of exploited fisheries population. In: *Proc. Fourth Berkley Symp. Math. Stat. and Prob.* pp. 153~168, Univ. Calif. Press, Berkeley and Los Angeles, 1961
- 3) CAUSTON, D. R.: A computer program for fitting the Richards function. *Biometrics* 25: 401~409, 1969
- 4) MOSER, J. W. and HALL, O. F.: Deriving growth and yield functions for uneven-aged forest stands. *For. Sci.* 15: 183~188, 1969
- 5) RICHARDS, F. J.: The quantitative analysis of growth. In: *Plant physiology V A* (Ed. by F. C. Steward). pp. 3~76, Academic Press, New York and London, 1969
- 6) BECK, D. E.: Height-growth patterns and site index of white pine in the southern Appalachians. *For. Sci.* 17: 252~260, 1971
- 7) PIENAAR, L. V. and TURNBULL, K. J.: The Chapman-Richards generalization of von Bertalanffy's growth model for basal area growth and yield in even-aged stands. *For. Sci.* 19: 2~22, 1973
- 8) PAYANDEH, B.: Formulated site index curves for major timber species in Ontario. *For. Sci.* 20: 143~144, 1974
- 9) RAWAT, A. S. and FRANZ, F.: Detailed non-linear asymptotic regression studies on tree and stand growth with particular reference to forest yield research in Bavaria (Federal Republic of Germany) and India. In: *Growth models for tree and stand simulation* (Ed. by J. Fries). pp. 182~221, Royal College of Forestry, Stockholm, 1974
- 10) FLETCHER, R. I.: A general solution for the complete Richards function. *Math. Biosci.* 27: 349~360, 1975
- 11) 大隅眞一: RICHARDS の生長函数とその林木生長への応用. 87 回日林論: 111 ~112, 1976

- 12) DAVIES, O. L. and KU, J. Y.: Re-examination of the fitting of the Richards growth function. *Biometrics* 33: 546~547, 1977
- 13) MADGWICK, H. A. I., OLAH, F. D., and BURKHART, H. E.: Biomass of open-grown Virginia pine. *For Sci.* 23: 89~91, 1977
- 14) 大隅眞一: RICHARDS の生長函数, 林業統計研究会誌 2: 47~58, 1977
- 15) 大隅眞一: RICHARDS の生長函数の, 林木生長へのあてはめについて, 88 回日林論: 109 ~111, 1977
- 16) CAUSTON, D. R., ELIAS, C. O., and HADLEY, P.: Biometrical studies of plant growth I. The Richards function, and its application in analysing the effects of temperature on leaf growth. *Plant Cell Environ.* 1: 163~184, 1978
- 17) LAAR, A. van: The growth of unthinned *Pinus patula* in relation to spacing. *South Afr. For. J.* 107: 3~11, 1978
- 18) LAAR, A. van and BREDEKAMP, B.: The effect of initial spacing on some growth parameters of *Eucalyptus grandis*. *South Afr. For. J.* 111: 58~63, 1979
- 19) 境 米造・大隅眞一: RICHARDS 生長関数による生長解析について, 90 回日林論: 91~94, 1979
- 20) 吉田成章: 生長曲線の検討, 日林誌 61: 321 ~329, 1979
- 21) EBERT, T. A.: Estimating parameters in a flexible growth function, the Richards function. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 37: 687~692, 1980
- 22) 石川善朗・大隅眞一: RICHARDS 生長関数による生長解析——カラマツ人工林, 天然生トドマツおよび天然生アカエゾマツの個樹の生長, 91 回日林論: 81~82, 1980
- 23) 大隅眞一・石川善朗: RICHARDS の生長関数をあてはめるためのコンピュータプログラムの作成, 京府大演報 24: 64~88, 1980
- 24) CAUSTON, D. R. and VENUS, J. C.: *The biometry of plant growth.* 307pp, Edward Arnold, London, 1981
- 25) FERGUSON, I. S.: Growth functions for radiata pine plantations. In: *Mensuration, growth and yield conference, Oxford, September 1979* (Ed. by H. Wright). pp. 25~45, 1981
- 26) HUNT, R.: The fitted curve in plant growth studies. In: *Mathematics and plant physiology* (Ed. by D. A. Rose and D. A. Charles-Edwards). pp. 283~298, 1981
- 27) 石川善朗・大隅眞一: RICHARDS 生長関数による生長解析——カラマツ, トドマツおよびアカエゾマツについての事例——, 京府大演報 25: 29~37, 1981
- 28) KILPATRICK, D. J. and SAVILL, P. S.: Top height growth curves for Sitka spruce in Northern Ireland. *Forestry* 54: 31~39, 1981
- 29) MACHADO, S. A.: The use of flexible biological model for basal area growth and yield studies of *Pinus taeda* plantation in the state of Parana-Brazil. In: *Proc. XVII IUFRO World Congress S4 01-02, 04, S6 02.* pp. 75~91, 1981
- 30) ROSE, D. W., LEARY, R. A., and CHEN, C. M.: Maximum cubic volume production through easily derived optimum thinning schedules. *J. For.* 79: 32~35, 1981
- 31) 田中和博・若松正弘: RICHARDS の生長関数による林分生長の解析, 92 回日林論: 107 ~108, 1981
- 32) YANG, Y. C. and LIN, F. P.: BERTALANFFY's generalized growth function applied to stands of varying CCF. *J. Jpn. For. Soc.* 63: 294~297, 1981
- 33) 伊藤達夫・大隅眞一: Richards 生長関数による林分の生長解析, 93 回日林論: 133 ~134, 1982

- 34) COOPER, C. F.: Carbon storage in managed forests. *Can. J. For. Res.* 13: 155~166, 1983
- 35) GARCIA, O: A stochastic differential equation model for the height growth of forest stands. *Biometrics* 39: 1059~1072, 1983
- 36) 堀田雄次: 生長関数の解法による誤差. 35回日林関東支論: 55~58, 1983
- 37) 内藤健司・白石則彦: RICHARDS function の分類と林分生長曲線への応用 (I) 増加型関数について. *日林誌* 65: 248 ~252, 1983
- 38) 内藤健司・白石則彦: RICHARDS function の分類と林分生長曲線への応用 (II) 減少型関数について. *日林誌* 65: 294 ~298, 1983
- 39) 内藤健司: RICHARDS function に基づいた林分生長解析 (I) w-N trajectory. *日林誌* 65: 399 ~407, 1983
- 40) 内藤健司: 分布関数としての Richards function. 35回日林関東支論: 51~54, 1983
- 41) OSUMI, S.: Applicabilité de la fonction de RICHARDS à l'analyse de croissance de l'arbre. *Comptendu: "Mesures des biomasses et des accroissements forestiers, Orléans, 3-7 octobre 1983" (Les Colloques de l'I.N.R.A., No. 19). pp. 77~86, INRA Publ., Paris, 1983*
- 42) 大隅眞一・石川善朗: 樹木の生長解析に対する RICHARDS 生長関数の適用性について. *京府大学術報告・農学* 35: 49~76, 1983
- 43) PAYANDEH, B.: Some applications of nonlinear regression models in forestry research. *For. Chron.* 59: 244~248, 1983
- 44) 阪上俊郎: タテヤマシギの生長パターン (I)——Richards の生長関数による解析と葉量を考慮にいれた生長モデルでの検討——. 31回日林中支論: 87~90, 1983
- 45) 白石則彦: Basic による Richards 関数あてはめのプログラム. *林業統計研究会誌* 8: 50~57, 1983
- 46) ITO, T. and OSUMI, S.: An analysis of the basal area growth in even-aged pure stands based on the RICHARDS growth function. *J. Jpn. For. Soc.* 66: 99~108, 1984
- 47) 内藤健司: RICHARDS function に基づいた林分生長解析 (II) 最多密度曲線. *日林誌* 66: 10~16, 1984
- 48) 内藤健司: RICHARDS function に基づいた林分生長解析 (III) w-N 曲線. *日林誌* 66: 454 ~461, 1984
- 49) 阪上俊郎: 高海拔地に植栽されたタテヤマシギ (*Cryptomeria japonica* D. DON) の生長と生産力. *富山県林試研報* 10: 16~23, 1984
- 50) 阿部信行: 宗谷管内トドマツ人工林の生長解析. 34回日林北支論: 28~30, 1985
- 51) GERTNER, G. Z.: Efficient nonlinear growth model estimation: its relationship to measurement interval. *For. Sci.* 31: 821~826, 1985
- 52) 本城尚正・石川善朗・大隅眞一: Richards 生長関数による樹葉の伸長過程の解析について. 96回日林論: 319~320, 1985
- 53) HOZUMI, K.: Phase diagrammatic approach to the analysis of growth curve using the u-w diagram. *Bot. Mag. Tokyo* 98: 239~250, 1985
- 54) 石川善朗・大隅眞一: RICHARDS 生長関数によるスギ単木の生長解析. 96回日林論: 113 ~116, 1985
- 55) 石川善朗・大隅眞一: RICHARDS 生長関数によるアカマツ, クロマツの上生長の解析. 96回日林論: 117~120, 1985
- 56) 伊藤達夫・大隅眞一: RICHARDS 生長関数による林分の生長解析——定期平均生長量を用いた林分胸高断面積生長モデルのパラメータの推定——. 96回日林論: 111 ~112, 1985
- 57) ITO, T. and OSUMI, S.: Growth models for total and average basal area in even-aged pure stands

- based on the RICHARDS growth function (I) Derivation of the models. J. Jpn. For. Soc. 67: 434~441, 1985
- 58) 堀田雄次：カラマツ疎密植栽試験 (IV) ——根元直径の生長解析——。筑大演報 2: 1~16, 1986
- 59) 堀田雄次：RICHARDS 生長関数のパラメーターの安定性。38 回日林関東支論: 25~26, 1986
- 60) 石川善朗：RICHARDS 生長関数によるスギ樹幹直径の生長解析。日林誌 68: 429~432, 1986
- 61) ITO, T. and OSUMI, S.: Growth models for total and average basal area in even-aged pure stands based on the RICHARDS growth function (II) Application of the models to stands of sugi (*Cryptomeria japonica*) and hinoki (*Chamaecyparis obtusa*). J. Jpn. For. Soc. 68: 303~313, 1986
- 62) LYNCH, T. B. and MOSER, J. W.: A growth model for mixed species stands. For. Sci. 32: 697~706, 1986
- 63) 阪上俊郎・平 英彰：多雪地帯のスギ幼齢木の根元曲りとその回復が季節的樹高生長パターンに及ぼす影響。日林誌 68: 87~94, 1986
- 64) 阪上俊郎：タテヤマスギ壮齢林の生産力。富山県林試研報 11: 18~24, 1986
- 65) 阪上俊郎・平 英彰：タテヤマスギの生長パターン (II) ——根元曲りの樹高生長への影響——。富山県林試研報 11: 25~32, 1986
- 66) 阿部信行：トドマツ人工林の生長予測 (I) ——人工林内の個体に対する生長曲線のパラメーターの解析——。98 回日林論: 119~120, 1987
- 67) 堀田雄次：カラマツ疎密植栽試験 (V) ——根元直径の生長解析の詳細——。筑大演報 3: 1~19, 1987
- 68) 堀田雄次：林分の疎密と生長。林業統計研究会誌 12: 5~10, 1987
- 69) 堀田雄次：経営予測と生長予測。北方林業 39: 141~145, 1987
- 70) 石川善朗：分布関数としてみた RICHARDS 生長関数の特徴。日林誌 69: 445~449, 1987
- 71) ITO, T.: A system of growth models for even-aged pure stands based on the RICHARDS growth function (I) A growth model for average height. J. Jpn. For. Soc. 69: 221~227, 1987
- 72) ITO, T.: A system of growth models for even-aged pure stands based on the RICHARDS growth function (II) A growth model for stand volume. J. Jpn. For. Soc. 69: 391~397, 1987
- 73) 吉川 賢・前野隆彦・永森通雄：クスノキとソメイヨシノの直径生長の季節変化の解析。98 回日林論: 393~394, 1987
- 74) ITO, T.: A system of growth models for even-aged pure stands based on the RICHARDS growth function (III) Estimation of the parameters using data from remeasured temporary sample plots. J. Jpn. For. Soc. 70: 57~63, 1988
- 75) ITO, T.: A system of growth models for even-aged pure stands based on the RICHARDS growth function (IV) Estimation of the parameters using data from a temporary sample plot and stem-analyzed sample trees. J. Jpn. For. Soc. 70: 95~103, 1988
- 76) 上野洋二郎・石川正吾：単木生長モデルから誘導された GOMPertz 関数。日林誌 70: 104~110, 1988
- 77) 内藤健司：標本における極値の漸近分布関数の誘導。日林誌 70: 255~260, 1988
- 78) 梅村武夫：リチャーズの関数の極限。36 回日林中支論: 75~76, 1988