林統研誌 15 '90　　18～24

ファジィ多目的計画法について*

野上啓一郎**

I. はじめに

多目的計画法は，森林の多目的利用に関する有効な情報を提供するために用いることが出来る手法の一つである。その中で特に我々に馴染みの深いものと言えば，多目的線形計画法（ベクトル最大化あるいは最小化手法）と目標計画法（ゴールプログラミング）であろう。前者はいくつかの目的関数を定式化し，一定の制約条件のもとに目的関数の値を出来る限り最大もしくは最小にするような解を求めるものである。一方後者は数個の目的関数と制約条件を定式化することにおいては前者と同じであるが，目的関数を最大化（最小化）するのではなく，それらに関して，ある志望水準を設定し，出来る限りこれらの志望水準を満足するような解を見いだそうとするものである。双方の手法において，制約条件は線形の不等式や等式によって表現され，それらの右辺，すなわちある計画において用いることが出来る制約量，もしくは志望水準はクリスプな値で与えられる。しかし現実には，このように固定した値を与えることが困難な場合もあるであろうし，たとえ与えることが可能であっても，そうすることが不合理と考えられる時もある。本研究では，目的関数に関する志望水準が明確に与えられない場合の多目的計画法を，ファジィ集合理論におけるメンバーシップ関数の概念の適用と言う観点から考察し，その簡単な数値例を示す。本手法の特徴は，1）各目的に関する志望水準をメンバーシップ関数で表現しそれらの和を最大にするような解を求めることにより，目的間のトレードオフを簡単にシミュレート出来ること，したがって意思決定者との対話が可能となること，2）目標計画法における絶対優先度や相対的重みの概念を組み込むことが出来ること，3）各目的の達成度をメンバーシップ関数の値で提示出来ること，4）モデルの構造が単純かつ論理的であるため，容易にプログラム化が出来ること，などである。

II. ファジィ多目的計画法

本論文におけるファジィ多目的計画問題は次のように定式化される。

satisfy　$O_i(X) \gtrless g_i$, $i=1, 2, \cdots, m$　(1. 1)

subject to　$AX \leqq B,\ X \geqq 0$　(1. 2)

ここに

* On fuzzy multiobjective programming

**Keiitirou Nogami, Faculty of Agriculture, University of Shizuoka, 836 Oya, Shizuoka 422
静岡大学農学部

$$X=\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{vmatrix} \qquad B=\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{vmatrix} \qquad A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{vmatrix}$$

O_i（X）は目的関数，g_iは各目的関数の値に関する志望水準，$\gtrless$はファジィ不等号で，“だいたい…より大きいか等しいあるいはだいたい…より小さいか等しい”と言う意味である。　ここで一言付言するが，より一般的なファジィ多目的計画問題の定式化では，（１．２）式の第一項の制約式における不等号をファジィ不等号に置き換えることが考えられるが，以後の説明から容易に分かる通り，この場合は本研究における手法の単純な拡張に過ぎない。

さて，Zimmermann[3]にしたがって，各目的関数に関するファジィ不等号，$O_i(X) \gtrsim g_i$，$O_i(X) \lesssim g_i$，をそれぞれ次のような線形メンバーシップ関数で定義する。

$$\mu_i=\begin{cases} 1 & ;O_i(X) \geqq g_i \\ \{O_i(X)-L_i\}/(g_i-L_i) & ;L_i < O_i(X) < g_i \\ 0 & ;O_i(X) \leqq L_i \end{cases} \qquad (2)$$

$$\mu_i=\begin{cases} 1 & ;O_i(X) \leqq g_i \\ \{U_i-O_i(X)\}/(U_i-g_i) & ;g_i < O_i(X) < U_i \\ 0 & ;O_i(X) \geqq U_i \end{cases} \qquad (3)$$

ここにL_i，U_iはそれぞれファジィ目標に関する志望水準の下限値，上限値であり，本来これらは意思決定者の主観によって決定されるべきものである。

この時，（１．１），（１．２）式で表現されるファジィ多目的計画問題は，(2)式もしくは(3)式で定義したメンバーシップ関数の和を最大にする解を求める線形計画問題と考えることが出来る。

すなわち

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad \Sigma \mu_i \\ \text{sub.to} \quad &\mu_i=\{O_i(X)-L_i\}/(g_i-L_i);L_i \leqq O_i(X) \leqq g_i \\ &\mu_i=\{U_i-O_i(X)\}/(U_i-g_i);g_i \leqq O_i(X) \leqq U_i \\ &AX \leqq B, \quad 0 \leqq \mu_i \leqq 1, \quad X \geqq 0 \\ &i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \end{aligned} \qquad (4)$$

Ⅲ．数　値　例

ここではWALKER[1]の問題の一部を用いて，ファジィ多目的計画手法の数値例を示す。したがって

最初に彼の問題の概略を説明することから始め，次にこの問題にファジィ多目的計画手法を適用することを考える。

1．WALKER の目標計画問題[1)]

三種類の地位状態，P，Q，Rの林地があり，それぞれの面積は1,000ha，2,200ha，1,800haである。よって全造林対象面積は5,000haである。この対象地は天然更新が不可能であり，したがって植林もしくは播種による人工更新を実行しなくてはならない。三種類の樹種，S_1，S_2，S_3と三種類の造林代替案1，2，3が与えられている。代替案1，2は植林，代替案3は播種に関わるものである。造林面積の上限が樹種S_1に対しては700ha，S_2，S_3に対しては400haと設定された。種子は豊富に存在している。次に将来の需要を考えて収穫量の下限が設定された。すなわち樹種S_1とS_2を合わせて3,300㎥／年，S_3については1,700㎥／年，全体的収穫量（$S_1+S_2+S_3$の収穫量）の下限は5,500㎥／年と見積もられた。造林事業に支出できる費用の上限は800,000ドルである。

以上の制約条件下で造林実行者は三つの目標を設定した。すなわちO_1（X）:年平均収穫量に関する志望水準達成，O_2（X）:造林費用に関する志望水準達成，O_3（X）:造林面積に関する志望水準達成，の三つである。ただし本研究においては説明の簡略化のために，第三番目の目標を除いた残り二つの目標について考察した。表－1にはWALKERがこの問題を目標計画問題として定式化するために用いた係数の一覧を示す。

表－1　計画問題定式化に必要な諸係数

		代替案（Silvicultural treatment）					
		1		2		3	
樹種 (Species)	地位状態 (Site type)	費用（Cost）($/ha)	収穫量（Yield）(㎥・ha⁻¹・year⁻¹)	費用（Cost）($/ha)	収穫量（Yield）(㎥・ha⁻¹・year⁻¹)	費用（Cost）($/ha)	収穫量（Yield）(㎥・ha⁻¹・year⁻¹)
S 1	P	350	2.7	310	1.6	140	1.0
S 1	Q	350	2.3	270	1.4	140	0.6
S 1	R	270	1.4	170	1.3	100	0.6
S 2	P	350	2.9	310	1.9	140	1.1
S 2	Q	350	2.3	270	1.4	140	0.6
S 2	R	270	1.1	170	1.0	100	0.5
S 3	P	310	3.4	170	2.6	90	1.1
S 3	Q	310	2.9	170	2.1	90	0.8
S 3	R	170	1.4	130	1.0	90	0.5

注）出典：Walker（1985），p. 321；table 1.

2．ファジィ多目的計画問題の定式化

(2), (3)式から，二つの目標，O_1（X）とO_2（X）に関する志望水準のメンバーシップ関数を表すと

$$\mu_1 = \begin{cases} 1 & ; O_1(X) \geqq 6{,}500\ (\mathrm{m}^3) \\ \{O_1(X) - 5{,}500\} / (6{,}500 - 5{,}500) & ; 5{,}500 < O_1(X) < 6{,}500 \\ 0 & ; O_1(X) \leqq 5{,}500 \end{cases}$$

$$\mu_2 = \begin{cases} 1 & ; O_2(X) \leqq 700{,}000\ (\$) \\ \{800{,}000 - O_2(X)\} / (800{,}000 - 700{,}000) & ; 700{,}000 < O_2(X) < 800{,}000 \\ 0 & ; O_2(X) \geqq 800{,}000 \end{cases}$$

となる。

ただしここに，年平均収穫量の志望水準とその上限をそれぞれ5,500㎥，6,500㎥，造林費用の志望水準とその下限をそれぞれ800,000ドル，700,000ドルと想定した。実際にはこれらの値は意思決定者によって設定されるべきものである。また，$O_1(X) = \Sigma Y_i X_i$，$O_2(X) = \Sigma C_i X_i$であり，Y_i，C_i，i＝1，2，・・・，27，はそれぞれ表－1に示す収穫量と費用に関する係数である。

以上のメンバーシップ関数と(4)式から，WALKERの目標計画問題に対応するファジィ多目的計画問題は，次のような通常線形計画問題として定式化される。

$$\mathrm{Max} \quad \mu_1 + \mu_2 \qquad (5.\ 1)$$

sub.to

$$\Sigma V_{ji} X_i \leqq T_j, \quad j = S_1,\ S_2,\ S_3 \qquad (5.\ 2)$$

$$\Sigma S_{ki} X_i \leqq M_k, \quad k = P,\ Q,\ R \qquad (5.\ 3)$$

$$\Sigma Y_{1i} X_i \geqq 3{,}300\,\mathrm{m}^3 \qquad (5.\ 4)$$

$$\Sigma Y_{2i} X_i \geqq 1{,}700\,\mathrm{m}^3 \qquad (5.\ 5)$$

$$\mu_1 = \{O_1(X) - 5{,}500\} / (6{,}500 - 5{,}500) \qquad (5.\ 6)$$

$$\mu_2 = \{800{,}000 - O_2(X)\} / (800{,}000 - 700{,}000) \qquad (5.\ 7)$$

$$O_1(X) = \Sigma Y_i X_i \qquad (5.\ 8)$$

$$O_2(X) = \Sigma C_i X_i \qquad (5.\ 9)$$

$$\mu_1,\ \mu_2 \leqq 1 \qquad (5.\ 10)$$

$$X_i \geqq 0 \qquad (5.\ 11)$$

ここに，V_j：i番目の決定変数X_iのもとで樹種jが植林あるいは播種される場合には1という値を，

その他の時には0という値をとる変数，T_j：樹種jを植林あるいは播種することが出来る上限面積 S_k：i番目の決定変数が地位状態kに対応している場合には1という値を，その他の時には0という値をとる変数，M_k：地位状態がkである全面積，Y_{1i}：i番目の決定変数X_iのもとでの樹種S_1もしくはS_2の収穫量（㎥／ha／year;表－1参照），Y_{2i}：i番目の決定変数X_iのもとでの樹種S_3の収穫量（㎥／ha／year;表－1参照）である。その他は前に同じ。

上記の線形計画問題を次のような3つのモデルケースについて解いた結果を表－2に示す。

Case 1：上記の線形計画問題をそのまま解く。

Case 2：第一番目の目標に関するメンバーシップ関数の値μ_1を任意の値（本研究では0.4）に設定し（5．10式において$\mu_1 \leqq 1$を$\mu_1 = 0.4$とする），第二番目の目標に関するメンバーシップ関数の値μ_2を最大にするように解く（5．1式のMax　$\mu_1 + \mu_2$をMax　μ_2とする）。

Case 3：第二番目の目標に関するメンバーシップ関数の値μ_2を任意の値（本研究では0.4）に設定し（5．10式において$\mu_2 \leqq 1$を$\mu_2 = 0.4$とする），第一番目の目標に関するメンバーシップ関数の値μ_1を最大にするように解く（5．1式のMax　$\mu_1 + \mu_2$をMax　μ_1とする）。

表－2　ファジィ多目的計画問題の解

決定変数（X_i）	CASE1	CASE2 $\mu_1=0.4$, MAXμ_2	CASE3 $\mu_2=0.4$, MAXμ_1	a de novo programming
X_1（S_1P1）	285.00	285.00	200.00	0
X_2（S_1P2）	0	0	0	0
X_3（S_1P3）	0	0	0	0
X_4（S_1Q1）	0	0	106.25	0
X_5（S_1Q2）	0	0	0	0
X_6（S_1Q3）	0	0	0	0
X_7（S_1R1）	0	0	0	0
X_8（S_1R2）	415.00	415.00	393.75	1,800.00
X_9（S_1R3）	1,385.00	1,385.00	1,406.25	0
X_{10}（S_2P1）	400.00	400.00	400.00	331.03
X_{11}（S_2P2）	0	0	0	0
X_{12}（S_2P3）	0	0	0	0
X_{13}（S_2Q1）	0	0	0	0
X_{14}（S_2Q2）	0	0	0	0
X_{15}（S_2Q3）	0	0	0	0
X_{16}（S_2R1）	0	0	0	0
X_{17}（S_2R2）	0	0	0	0
X_{18}（S_2R3）	0	0	0	0
X_{19}（S_3P1）	0	0	205.80	0
X_{20}（S_3P2）	315.00	315.00	194.20	668.97
X_{21}（S_3P3）	0	0	0	0
X_{22}（S_3Q1）	0	0	0	0
X_{23}（S_3Q2）	85.00	85.00	0	695.57
X_{24}（S_3Q3）	2,115.00	2,115.00	2,093.75	0
X_{25}（S_3R1）	0	0	0	0
X_{26}（S_3R2）	0	0	0	0
X_{27}（S_3R3）	0	0	0	0
μ_1	0.4895	0.4000	0.6796	1.0000
μ_2	0.6190	0.6861	0.4000	0.9744
収穫材積（㎥／ha）	5,990	5,900	6,180	6,500
造林面積（ha）	5,000	4,888	5,000	3,496
造林費用（$）	707,150	697,081	740,000	653,833

注）例：X_1（S_1P1）の意味は，X_1という一つの決定変数が樹種S1，地位状態P，代替案1に対応していることを表している。

3．a de novo programmingによる制約量の決定

従来，線形計画法や目標計画法における制約式の右辺，すなわち資源の制約量は所与のもので固定されているのが普通である。つまり，通常の数理計画問題の根底にある考え方は，ある一定の制約条件下で目的関数を最大あるいは最小にする最適解，あるいはある志望水準における満足解を見いだすということであって，そこには最適なシステムを設計するという考え方は存在しない。もちろん感度分析（Sensitivity analysis）は若干このような立場を含んではいるが十分なものではない。本節ではZELENY[2)]によって提案されたa de novo programmingの考え方を取り入れた最適なシステム設計について簡単な検討を行う。（5．2）式の右辺T_jの決定を考えて見よう。つまり$\Sigma V_j X_i \leqq T_j$において，T_jを所与のもの（すなわちハードな制約量）とはみなさずに変化することができるもの（ソフトな制約量）と仮定する。このことはT_jを新しい決定変数と見なして（5．1）から（5．11）式までの線形計画問題を解くことに他ならない。その結果を表－2の右端に示す。表－2のCase 1の計算結果とこれを比較してみると次の事実が確認できる。すなわち（5．2）式の右辺の制約量が固定されている場合，二つの目的関数に関する志望水準の達成度はそれぞれ$\mu_1=.4895$，$\mu_2=.6190$であるが，（5．2）式の右辺を最適に設計することで，その他の条件はまったく同じであるにもかかわらず，$\mu_1=1.0000$，μ_2.9744と格段の達成度の上昇が実現されている。そこでは一番目の目的関数（年平均収穫量）に関する志望水準は完全に満足され，二番目の目的関数（造林費用）に関するそれもほぼ満足されている。このようにシステムを最適に設計することによって各目標の達成度が上昇される。この事実は意思決定者に価値ある付加的情報を提供するものと考えられる。

IV．考　　察

ここに示した計算結果はほんの一部であるが，各目標に関する志望水準の達成度をいろいろと変化させることにより，さまざまな計算結果を与えることが出来る。したがってこの中から意思決定者は自分の満足する解を選択することが可能になる。本手法は当然，三つ以上の目標をもつ計画問題に直接的に拡張することが出来る。さらに各メンバーシップ関数は無次元量であるために相対的な重みを付けて，その和を最大にするということも考えられる。すなわち，Max $\Sigma\mu_i$の代わりにMax $\Sigma w_i\mu_i$とすればよい。w_iの推定方法はいろいろと考えられるであろうが，最も簡単なものとしてはAHP法（Analytic Hierarchy Process）がある。また絶対優先順位（Preemptive Priority）の概念を取り組むことが出来，これは次のように考えればよい。すなわち，例えば3つの目標O_1（X)，O_2(X)，O_3(X)があり，意思決定者はO_1(X)，O_2(X) をまず満足したいとする。その場合は1）最初にMax　$\mu_1+\mu_2$として線形計画問題を解き，μ_1とμ_2の値を求める。仮にこれらの値をα，βとする。2）次に$\mu_1=\alpha$と$\mu_2=\beta$を制約式に含めることで，Max μ_3として新しい線形計画問題を解けばよい。

本手法は従来のゴールプログラミングと線形計画法の考え方をミックスしたものである。すなわち，ファジィな制約量を取り扱うことができる本手法は，線形計画問題のように目的関数を最大あるいは最小にする解を求めるのではなく，ある志望水準をできるだけ満足するような満足解を求めるのであるが，その際に従来のゴールプログラミングの解法ではなく，線形計画問題を解くシンプレックス法によって解を求めるため，ゴールプログラミングにおける最大の欠点である非劣解あるいは有効解の問題を回避できるというすばらしい性質を持っている。さらに，a de novo programmingの考え方を組み合わせることで最適なシステムを設計することも可能である。

V．おわりに

ファジィ多目的計画法は森林の有する多機能を我々が有効に利活用するための適切な情報を提供する一つの方法であろう。ただしファジィ多目的計画法の定式化はいろいろな観点から可能であり，本手法はその一部に過ぎないことをことわっておく。

参考文献

1）H.D.Walker:An alternative approach to goal programming.Can.J.For.Res.15:319～325.1985

2）M.Zeleny:Multiple criteria decision making.563pp,McGraw-Hill,New York,NY,1982

3）H.-J.Z:immermannFuzzy programming and linear programming with several objective functions.Fuzzy sets and systems 1:45～55,1978