共軸座標を用いた多変量解析について

福岡県林業試験場　福　島　敏　彦

最近，共軸座標を用いた解析について，その解析方法，共軸図の見方，数式化等の問合せが多く，中には電話によるものもあり，充分な説明が出来ないこともある。

そこで，この機会に本解析について平易に解説する。

自然現象や社会現象を座標上に示す場合に単一の説明変量で示すことは少なく，２つ以上の説明変量となる場合が大半です。

目的変量と説明変量が２つ，計３元までは図－１のように座標上に示すことができるが，４元以上になると一度に座標上に示すことは困難となります。

そこで，４元目からは変量が増加（元が増加）するごとに座標を継足して示したものが共軸座標である。

解析方法の基本について図－１を例（原点を通る場合）に説明する。

まず，図－１のX・Y軸を逆に取り，Y 軸はさらにY 軸と$\overline{Y}_1$（推定を示す）軸とに分け，A_1・A_2 曲線も図－２のように示す。

次に，座標上の各点（調査資料）がX，Yに関して最少自乗となる曲線A_0 を求める。

図－２のX軸上の任意の点をX_1 として，曲線$X=X_1$ と曲線A_1，A_0，A_2 との交点をそれぞれa_1，a_0，a_2 とし，それに対応する$\overline{Y}_1$ の値をb_1，b_0，b_3（$b_1<b_0<b_2$）とする。

X・Yとの関係から（A_0 曲線のみ利用）推定値$\overline{Y}_1$ を求めると，X_1 に対応する$\overline{Y}_1$ の値は，$\overline{Y}_1=b_0$ となり，a_1 はb_0-b_1 だけ過大に推定される。a_2 はb_2-b_0 だけ過少に推定され誤差があることを示している。即ち，$Y\fallingdotseq\overline{Y}_1$ 。$Y\rightleftharpoons\overline{Y}$ 。

この誤差を別の座標で補うことにする。

まず，縦軸にYとY_2，横軸に$\overline{Y}_1$ を図－３のようにとる。

図－２で最少自乗法で求めた曲線A_0 は図－３の座標上では丁度45°を示す位置にあり，この曲線をA_0'とする。

図－２の点a_0 に相当する点は図－３の座標上の曲線$\overline{Y}_1=b_0$ と曲線A_0' との交点となる。この点をa_0'とする。

図－２の点a_1 及びa_2 に相当する点は図－３の座標上では曲線$Y_1=b_0$ と曲線$Y=b_1$ 及び，$Y=b_2$ との交点となる。この交点をそれぞれa_1'及びa_2'とする。

a_1'はa_0'よりb_0-b_1 だけY軸方向に小さい値となる。また，a_2 はa_0 よりb_2-b_0 だけ大きな値となる。

同様に図－2の座標上のX軸の任意の点Xnについても，a_{1_n}，a_{2_n} を求め，さら経，図－3の座標上にa'_{1_n}，a'_{2_n} を求めると，これらの点の軌跡がA_1'とA_2'の曲線となる。

A_1'とA_2'の曲線は説明変量Aを階層区分したことになる。

従って，図－2のA_1 とA_2 曲線は不用となったので，これを除いたものを図－2とする。

以上のことから，図－2と図－3を合わせた共軸図は図－1と同じ解が求められ，しかも，一般的に多く用いられている図－1と同じ考え方に基づくものである。

ところで，上記までは目的変量Yが説明変量XとAとで正解値が得られる場合で，図－1でこと足りるのであるが，正解値が得られず変量B，Cと付加したい時は図－1だけで示すのは困難である。

そこで，着目することは図－3の座標が測定値Yと推定値$\overline{Y}$となっていることです。

この関係を利用して，縦軸に$\overline{Y}_2$，横軸にYとY_3 を図－4のようにとり，Bを階層区分するとよい。こゝでは階層区分の結果が平衡になったと仮定する。

変量Cについても縦軸にYと$\overline{Y}_4$，横軸に$\overline{Y}_3$ を図－5のようにとり，Cを階層区分するとよい。こゝでは，階層区分の結果が原点を通ると仮定する。

以下，変量がD，E……と続いても，同様に階層区分をすればよい。

こゝで注意することは変量が付加されるごとにYと$\overline{Y}$軸方向が逆なることである。

上記までの解析結果を共軸図にするには，図2, 3, 4, 5上にP印を付けたところを一つの点に集合させると各図は「田」字形に配置され共軸図ができる。

共軸座標の見方を変量がX_1，A_2，B_1・C_3 の場合で説明する。

まずx_1 から右に（Y軸に平行に）進みA_0 に接したら，下に進み，A_2 に接したら右に進み，B_1に接したら上に進み，C_3 に接したら右に進み，$\overline{Y}_4$ の最終推定値を読みとる。

共軸座標がさらに続いてあるときは，最初の右下右上の繰返しとなる。

次に，数式化の方法であるが，図－2のA_0 曲線は，$Y \rightleftharpoons \overline{Y}_1 = T_1X + S_1$（$T_1$ S_1は定数）

図－3は原点を通る曲線であるから，

$$Y \rightleftharpoons \overline{Y}_2 = T_2\overline{Y}_1 + S_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

T_2 は値はAの値によって決まるのであるが，この場合T_2 の値はA_1'とA_2'の時の2つとなり，T_2は複雑な曲線式となるか解らないが，直線式しか求められない。そこで，こゝでは直線式となることにする。図－6は図－3からA_1'とA_2'の傾きを求め，AとT_2 との関係を求めたもので，$T_2 = T_2'A + S_2'$となり (1)式は

$$Y \rightleftharpoons \overline{Y}_2 = (T_2'A + S_2')\overline{Y}_1 + S_2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)'$$

図－4は平衡な線で階層区分されているので，傾きが同じである。そして，BはYに対して加算的に影響するから，

$$Y \rightleftharpoons \overline{Y}_3 = \overline{Y}_2 + S_3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

S_3 はBの値によって決る。今，B_1，B_2，B_3 の示す曲線の線間が等しいとする。このとき，

$B_1 - B_2 = B_2 - B_3$ ならば，S_3 とBとの関係は直線式となり，$S_3 = T_3'B + S_3'$ となり(3)式は

$$Y \doteqdot \overline{Y}_3 = \overline{Y}_2 + T_3'B + S_3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)'$$

となる。この場合を図－7に示した。

$B_1 - B_2 \fallingdotseq B_2 - B_3$ ならば，S_3 とBとの関係は曲線式となる。

図－5はY軸方向にCの階層区分線が等間隔で，原点通ることから，

$$Y \doteqdot \overline{Y}_4 = T_4\overline{Y}_3 + S_4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

となる。下$_4$ はCの値によって決る。

$C_1 - C_2 = C_2 - C_3 = C_3 - C_4 = C_4 - C_5$ ならばT_4とCとの関係は直線となるが，互いに等しくなければ曲線となる。

今，$C_1 < C_2 < C_3 < C_4 < C_5$

$$(C_2 - C_1 = C_5 - C_4) > (C_3 - C_2 = C_4 - C_3)$$

の時T_4 とCとの関係はC_3 を中心とした $\tan^{-1}$ 曲線となるので，$T_4 = \alpha \tan^{-1}\left(\frac{C - C_3}{r}\right) + R_4$となるので，(3)式は，

$$Y \doteqdot \overline{Y}_4 = \left\{ R_4 + \alpha \tan^{-1}\left(\frac{C - C_3}{r}\right) \right\} \overline{Y}_3 + S_4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)'$$

となる。

また，$C_1 > C_2 > C_3 > C_4 > C_5$

$$(C_2 - C_1 = C_5 - C_4) < (C_3 - C_2 = C_4 - C_3)$$

の時はT_4 とCとの関係は $\cot^{-1}$ 曲線となるので，(3) 式は

$$Y = \overline{Y}_4 = \left\{ R_4' + \alpha' \cot^{-1}\left(\frac{C - C_3}{r}\right) \right\} \overline{Y}_3 + S_4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)''$$

となる。これらの関係を図－8に示した。

以上で数式化の方法説明を終るが，変量Aの場合には調査時等でA_1 とA_2 の値を測定したことになり，図－6の線形は全く保障のないもので，出来ればAについて極端な場合を調査等の資料に若干加えておくと，A_1 ，A_2 以外の線形が求められ，図－6の線及び式はもっと主張をもったものとなる。

一般の統計学ではこれらの極端な値は棄却されがちであるが，こゝではむしろ重要なものとなる。

さいごに，上記までの説明では図－3を用いる替りに，図－2のA_1 とA_2 の曲線を除いたが，これは説明上除いたもので，一般的には図－2のA_1 とA_2 はそのまゝ残し（Y・X・Aを同時に解析する）図－3をそっくり除いて，図－3のところには図－4を，図－4のところに図－5を入れたものが普通の共軸座標図である。ただし，図－4，図－5を移動する場合はその図を裏返し，90°右に回転したものを入れる。

なお，本解析方法の実例は福岡県林業試験場時報第18と第23号に記しているので，これを参考にしていただきたい。

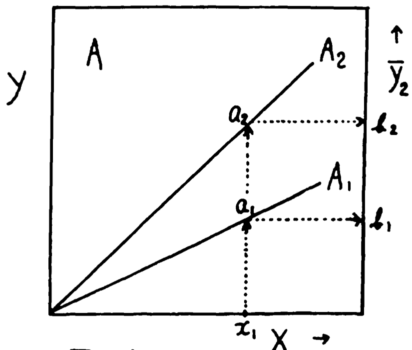

図-1

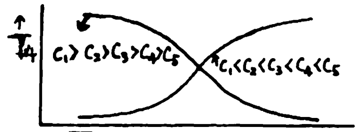

図-8

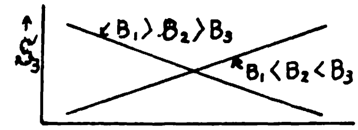

図-7

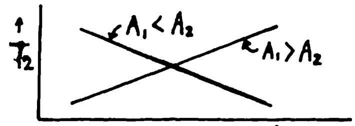

図-6

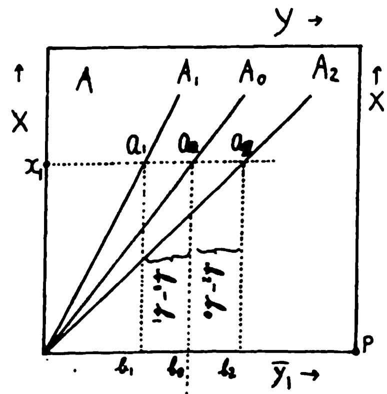

図-2

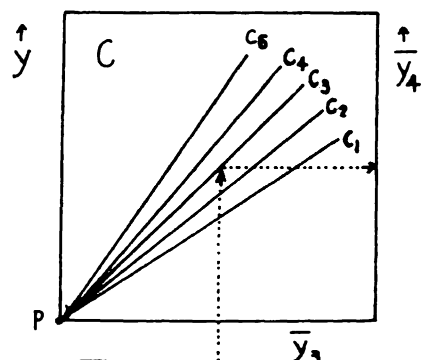

図-5

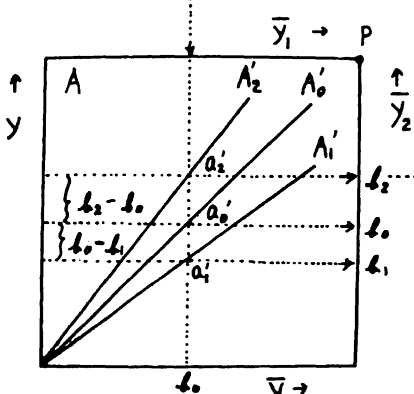

図-3

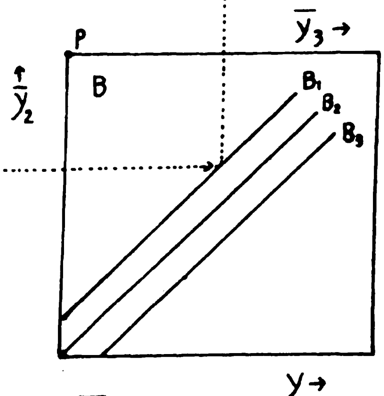

図-4