

B. Matérn の確率過程とその林学への 応用へのコメントを読んで

九大名誉教授 木 梨 謙 吉

鈴木太七さんの森林経理学(朝倉, 1979)を読んで、少し勉強のつもりで、昨年(1978年)フライブルグでもらったB. Matérn の Some comments on the theory of stochastic processes and its applications in forest research (1978)を読んだ。中味に立入って論議する力がないが、確率過程と林学の応用について傾聴に値するような気がする。題は「読んで」といって何か言いたそうだが、何も言わない方がましであること、また私と同じように、林学の立場から、その道すじを探索されている方々のために、というより自分の勉強のために書いた。

Matérn はこの論文のはじめに要旨として次のように述べている。

確率過程というのは、時間・空間又はその両方の中で起こる現象のモデルを与える確率変数の考え方を一般化したものと見ることが出来るといふ、この論文内容はその理論の初期からの進歩発展と、林業試験研究への導入について詳しく述べている。確率過程の中には次の3つの数学的で統計的な問題のグループがあるとし、

- (1) 過程の構築(モデルの選択)
- (2) 実験データの使用による統計的推論(検定と推論)
- (3) 解析的又はモンテ・カルロ法による過程の特性に関する研究

をあげている。此等の段階の中で用いられる手法は、確率過程応用への様々な欲求による目的によって異なるであろうとしている。以下原文の訳をそのまま紹介しよう。

1. 確率変数

確率過程(又はランダム過程)とは確率(又はランダム)変数の考え方を広く一般に適用したもので、極く簡単な例はサイコロ投げである。目の数を X とする。投げるときの完全な状態と、投てきを支配するすべての物理的法則を知っておれば、投てきによって何が起こるかを正しく決定論的立場から表現することは理論的に可能と考えられる。しかし実際には、このような無限に複雑なモデルを極めて簡単な確率モデル、すなわち6個の可能な結果に確率を結びつけるようなやり方でもって、置きかえざるを得ないのである。

又他の例では X をある測定器による一本の樹高の測定で得られた結果をあらわすとする。

こゝでもまた 心理的、技術的その他複雑な要因を考えるならば、結局確率的表現の中にすべて包摂せざるを得ない。すなわち、 X はその木の未知の正しい樹高のまわりにガウス分布をする確率変数と考えるわけである。

2. 確率変数

今いくつかの異った変数がそれらの値を持つ機構の確率的表現を与える場合を考えよう。それを非常に一般的な場合へとおしひろめるために、指定変数 X_t を考える。こゝで t はある指定集合 T に属するとし、そこでは確率分布は X_t を構成するすべての変数によってあらわされる数値の集合に、何等かのかたちでかかわっている。このような数値の集合は1つの標本関数又はその過程の中で現実にあられる値である。 X_t の現実にあられる値の集合は、その過程の状態空間である。簡単な場合、 T は有限な整数 $1, 2, \dots, n$ である。又他のモデルでは n 個の確率変数 X_1, X_2, \dots, X_n の同時分布と同値である。しかしながら、一つの過程について言っているとき、我々は常に T が無限である場合を考えている。初期の研究は主に時間の経過についてなされた。そこでは T は一定間隔の時点又は有限又は無限の時間間隔の離散型集合であった。より一般的には、たとえば、 $X_t = X(\tau, u, v, w)$ を考える。こゝで τ は時間を、 u, v, w は三次元空間の座標を表わし、また $X(\tau, u, v, w)$ はベクトルで示された値である。

単一確率変数の場合のように、我々は確率(ストカスチック)モデルを選ぶことによって、単純で適応性にとむモデルを得ることができるのである。

3. 初期の発展

現在ストカスチック・プロセスと呼ばれるものゝ最初の例は今世紀の初頭10年頃にあられはじめた。1900年の論文の中で、L. Bachelier は株式市場の研究の中でストカスチック過程の適用を試みた。それと同じ過程が、1905年に出版されたブラウン運動に関する有名な論文の中で、Einstein によって世にあられた。

F. Lundberg は1903年に保険会社の危険負担の研究に他のかたちのストカスチック・プロセスを紹介した。ポアソン過程はLundberg'sの過程のむしろ特別の場合であり、A. K. Erlang によって、1909年電話回線における輻湊の研究に用いられ、そしてE. Rutherford と H. Geiger によって、1908年放射性元素の崩壊のモデルとして用いられた。

此等の事はCrámer (1976) がより詳細にその歴史的発達について述べている。Crámer によって述べられているように、初期段階での数学的方法は多少厳密さが欠けていた。その最初の厳密な取扱いは1923年Wiener がブラウン運動について行った。その一般的理論のしっかりした数学的基礎は1930年頃にあられた。Kolmogorovs の有名な本(1933)をひきあいに出せば十分である。概念の内容は次第に発達してきた。重要な部門としてマルコフ過程、定常過程、点過程など今日専門的に確立された。最初の一般的教科書はおよそ1950年頃あられた。すなわちDoob (1953) である。もっと新しい応用をねらった専門論文はCox と Miller (1965) である。生物学への応用を主とした著書はBartlett (1960), Chiang (1968), Iosifescu と Tautu (1973) がある。

4. 林学研究への応用

生物学の問題への確率過程への応用の多くはまた林学者にとって素より興味あるものである。しかし、この節では、直接林業の問題に関係ある若干の応用をとりあげよう。しかし、ある例はまだいくらか疑問のままのものもある。読者は気づかれると思うが、この節の文献はどちらかといえば、スカンジナビアにかたよっているだろう。

マルコフ鎖は確率過程の最も簡単なタイプである。それは離散型のシステムをあらわす。確率マトリックス P_{ij} は i 番目の状態から、 j 番目の状態への各一段階ごとの遷移をおさえている。Waggoner と Stephens (1970) はこの方法で、ちがった植生相の土地面積がどのように変化するかを表現した。数名の著者は本数密度、平均材積、同様な変数によって特長づけられる林相の変化をあらわすのにマルコフ鎖を用いた。その例は鈴木(1960)や Hool (1966) である。単木の動き(たとえば直径級、生木枯死)を示す同様のモデルは Usher (1966), Beichelt (1969), Namkoong と Roberts (1974), Satyamurthi (1977), Williams (1978) がある。より詳しくは、Monserud (1976) をみるとよい。

マルコフ鎖は離散型ですゝむ。そのシステムの表現可能な状態は、有限すなわち明瞭な区画の切り離した数字に限定される。より密着した詳細を表現するには連続時間と状態の連続性におけるマルコフ過程が用いられる。たとえば一本の木の直径生長などをあらわす。鈴木(1971), Sloboda (1977) の研究がある。

上に掲げたモデルでは、個樹の発達にマルコフ過程(鎖)であらわされ、そこでは一つの林内の個々の木たちは確率的に独立であると一般に仮定される。一つの大面積の森林は、したがってこれらの木の合計の数学的期待値によって近似される。他のモデルでは樹間の競合の要素が導入されている。それは Newnham と Smith (1964), Mitchell (1969) であり、非常に多くの研究者たちもこの列に入るが、しかし R. M. Newnham はパイオニアとみることができる。確率過程は此等の研究ではおもてに出ていない。モデルの中で、樹木の時間的发展と空間的排置の両方が提供されている。典型的にはそのシステムは、モデル内に含まれない諸因子の影響を十分考慮して、純粹にランダム(独立)な項を持つ決定関数の数多くに基いている。

確率過程の明解な利用の初期の例は Hustich と Elfving (1944) である。彼等は一本の木の直径生長を一次の自己回帰系列すなわち同時に定常でマルコビアンである系列としてモデルを作った。定常過程(一般に、移動平均自己回帰型)のより広い利用のモデルは広く、すでに経済的時経列として用いられてきた。その1例は、Oliveria その他(1977) である。

空間過程(又は時間-空間過程の結合)は林学に対して特段に興味深いことは明らかである。此等の方向における最初の研究はいくらか特殊な理由によった。森林調査におけるいわゆる系統的サンプリング(又はラインプロット調査)はランダム・サンプリングの利用が強調される近代的標本調査理論の発足以前から久しく用いられた。標本抽出誤差はランダム・サンプリングの簡単な公式であら

わされることが確認された。この公式は調査しようとする母集団について全く何等の仮定なしに適用できるからである。この種のモデルに対する初期の試みは、Hagstroem と Östlind (1966) に見出されるが、それは1920年頃書かれた原稿の複元である。此等の研究者達は母集団をあらわすのによく用いられる壺の方法を使用する。定常過程型ということの出来る表現はLangsaeter (1932) に見られる。Langsaeter は共分散関数の代りに、フランス地学統計派の variogram を同意義のものとして用いる。此等の論文は統計専門家間の論議(1940年代の Cochran, Yates, the Madow's などの論文)に先立つこと10年余りである。詳細は Matérn (1947) に見出される。

そこでは定常過程の理論が用いられている。森林モデル化における多くの特殊な興味ある過程の紹介が Matérn (1960) にある。林業におけるサンプリングの問題を説明するために定常過程が用いられることは今日きわめて普通事に思われ、特殊の応用は Holgate (1967) と Matérn (1956・1972) の中に見出される。2つのもっと一般的論文は Giudicelli (1972) らと Millier らのものである。後者の論文はフランス地学統計派の興味ある発展を反映している。今日理論統計学者間で空間構造モデル化が生氣ある活動をなし、特に英国においてそうであることは注目に値する。

Ripley (1977) 参照。此の活動の多くは森林生態学領域で用いられるモデルの方向を指向している。

5. モデルの選択

通常、数学モデルは現実システムの異様に簡素化されすぎた画像を与える。しばしば、確率要素の包摂は多大の複雑性の導入なしに、モデルをより現実化することができる。モデルの決定的部分にあらわに導入されていない数多くの要因は、一組の確率変数によって代用される。もしシステムが、時間空間又はその両方の中で発展するならば、此の仕組は自然と確率過程の形をとる。

数学的モデルは勿論対象としている事物に関する理論と知識によって選択されねばならない。その理論は場合によっては、ランダム要素、たとえば遺伝のメンデル法則を含むことができる。もし、確率過程の選択が異った型の広い知識にもとづいてなされるならば、勿論それは一つの進歩である。決定的傾向に加えるに純ランダム成分をもって構成される「素朴なモデル」が時間・空間系列の現実的画像を与えうるということは極めて稀である。かなり一般的モデルは、ランダム成分は時間においてはマルコビアン性を又空間においては至近隣接関係のあるものによって支配されるという仮定によって得られる。それでもなお、もし森林生長過程はマルコフ過程に従うという過程が極度に重い制約でなければ、それを討議することができる。

モデルの選択は勿論、またその利用の反対の立場から見られねばならない。非常に単純なモデルは種々な仮定の可能な結果の説明、たとえば生長過程の説明として教育的価値がある。非常に野心的な場合には、その目的を原因機構の描写とすることもできる。中間の場合はモデルの利用は予測に役立つ。すなわち収穫表のタイプである。一般にモデルの規模がより野心的になればなる程、複雑さは増大するであろう。しかし、電算機の助けを借りれば、我々はより非常に多く詳細で複雑なモデルを、

従来可能であったより一層多く取扱うことができる。

6. 統計的推論の問題

使用するべきモデルに対して、それが実際のデータに対して十分信頼する価値のあることを適当な方法で検せねばならない。一般に、一つのモデルはいくつかのパラメーターを持ち、実際のデータから決定すべき数値を含んでいる。パラメーターのいくつかはすべての場合に共通の値をもち、又他のいくつかはそれぞれ異った場合ごとに変るようになっている。モデル構造の要求と同じように、用いようとする検定と推定方式への要求はモデル作成の目的に従って変る。第4節で指摘したいいくつかの研究では、研究者たちは統計的方法の性能（標本調査の設計、標本抽出誤差の推定子など）を十分研究し、又機器の性能、たとえばいくつかの造材機械の比較の研究などを行っている。このような場合勿論モデルは理論的にいって十分現実的であるべきであるが、それにもまして重要なことは、それがさらに一般的で、かつ現実パターンの外延ともいべき極端な場合にもあてはまる必要がある。一つの特例な場合にそのモデルをあてはめようとするようなとき、我々は普通の統計的推論の問題に直面し、検定と推定に対する方法の十分な基礎によらねばならない。時経別の解析に関する文献は非常に多く、多くの引用文献のある Kendall (1973) を参照するとよい。又空間データ解析に関しては Bartlett (1975) を見よ。

7. 確率過程の特性に関する研究

モデル構成の背景にある目的は何か。それは常に次のことである。すなわち、我々はモデルを操作することによって、そのシステムに影響を与える外側からの又策略的な要因の作動に対して、これこれの仮定のもとで一体何が起こるかを知りたいと望むことである。このような研究は時に解析的にすゝめることができる。そのやり方がらくらくとやれないときは、我々は電算機シミュレーションによることができる。それは明らかに教育的な利益を持ち、従って解析的方法が手もとにあるとしても、応用されることが出来よう。シミュレーションは策略的、外側のパラメーターの種々変化する値をもつ過程の実現が可能で、それを明示してくれる。用いられる方法は計画樹立の技術、標本調査及実験計画の推定と同意である。したがって、標本調査と実験計画の原理（又はモンテカルロ法におけるそれらの写し）が適用される。

文献は39掲げてあるが、そのうちから少しくひろって参考までに掲げると、

Chiang, C. I., 1968: Introduction to stochastic processes in biostatistics. Wiley, 311 pp.

Cox, D.R. & Miller, H.D., 1965: The theory of stochastic processes. Methuen, 398 pp.

Cramer, H., 1976: Half a century with probability theory: Some

- personal recollections. *Annals of probability*, vol. 4, pp.509—546
- Doob, J.L., 1953: *Stochastic processes*. Wiley, 654 pp.
- Hool, J. N., 1966: A dynamic programming—Markov chain approach to forest production control. *Forest Science Monograph* 12, 26 pp
- Kendall, M. G., 1973 : *Time series*. Griffin , 197 pp.
- Kolmogorov, A. N., 1933 : *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer, 62 pp.
- Matérn, B., 1960 : Spatial variation. *Medd. Statens skogsforsk. inst.*, vol. 49(5), 144 pp.
- Matérn, B., 1972 : The precision of basal area estimates. *Forest Science*, vol. 18, pp. 123 — 125
- Mitchell, K. J., 1969 : Simulation of the growth of even-aged stands of white spruce. *Yale Univ., School of Forestry, Bull. No. 75*, 48 pp.
- Monserud, R. A., 1976 : Simulation of forest tree mortality. *Forest Science*, vol. 22, pp. 438 — 444
- Newnham , R. M. and Smith, J. H. G., 1964 : Development and testing of stand models for Douglass fir and lodgepole pine. *Forest Chronicle*, vol. 40, pp. 494 — 502.
- Oliverira, R. A., Buongiorno, J . and Kmiotek, A. M., 1977 : Time series forecasting models of lumber cash, futures, and basis prices. *Forest Science*, vol. 23, pp. 268 — 280.
- Sloboda, B., 1976 : Kolmogorov — Suzuki and die stochastische Differentialgleichung als Beschreibungsmittel der Bestandesevolution. *Mitt. Forstl. Bundes - Versuchsanst.*, Wien, Heft 120, pp, 71 — 82.
- Suzuki, T., 1971 : Forest transition as a stochastic process. *Mitt. Forstl. Bundes - Versuchsanst.*, Wien, Heft 91, pp. 69 — 86.
- Usher, M. B., 1966 : A matrix approach to the management of renewable resources, with special reference to selection forests. *J. Appl. Ecol.*, vol. 3, pp. 355 — 367.

Waggoner, R. E. & Stephens, G. R., 1970: Transition Probabilities
for a forest. Nature, vol. 225, pp. 1160 - 1161.

Williams, J. S., 1978: Markov models for stand projection. Virginia
Polytech. Inst. and State Univ., Publication FWS - 1-78,
pp. 243 - 249

(なお、原著者は原文に対する意見を求めている。)

原文はIUFRO, S 6.02, Freiburg, German Federal Republic, 12 - 17
June 1978で発表されたもので, Bertil Matérn (64) は Swedish University of
Agricultural Sciences の教授である。

(昭和54.11.27)