モ デ ル 雑 感

東大農　　箕 輪 光 博

近頃またモデル論議が盛んになりつつあるようである。本誌も創刊号以来生長モデル関係の記事に多くのスペースを費やしている。筆者はこの二年間日林誌や大会論文集の編集に関わったお蔭で，生長モデルや直径分布モデル等の論文に度々出会う機会を得た。そこで，校正等の作業の中で思いついたことを二，三書いてみたい。したがって，以下の話は科学的（林学的!!）には何の根拠もない数式モデルに関する“形式的モデル考”である。

1.　モデルの不変性

はじめに，Richards 生長関数（以下R一関数と呼ぶ）とWeibul 分布（以下W一分布）を例に数式モデルの不変性ということについて考えてみたい。

R一関数が林木の生長式として好ましいことの一つは，大隅氏が本誌の第2号で指摘しているように，相対生長則（アロメトリック変換）やベキ変換（$y=ax^b$型の変換）に対してその形を変えないということである。両変換とも林木生長論の分野ではよく見かけるものであり，これらの変換に対してR一関数がその形を保存するということは，この関数自体が生長式として根拠を有すると考えてよいであろう。通常，数式モデルに対する評価は，それがいかなる仮定および数学的操作を経て導出されたかという観点からなされる。これに対して，上記のモデルの不変性（安定性）はモデル評価の別の側面である。仮に導出過程に多少怪しい仮定が含まれていても，相対生長則のごとき別の法則に媒介されてその存在が保障されれば，そのモデルは生長論的根拠を有すると考えられる。

次に，同様の観点からW一分布（近年，直径分布として著名になりつつある）について考える。この分布はもともと寿命分布として工学の分野で見出されたもので，その意味では林木の生長と何らの関係もない。また形式的には指数分布を一般化したものに相当する。この分布の特徴の一つは，$y=ax^b$型の変換に対してやはり形を変えないということである。仮に直径xがW一分布に従うとすると，変量y（たとえば断面積，材積，生育空間，個体重　等）もW一分布に従うことになる。樹木の個体重は指数分布にしたがうという報告例もあるが，これはW一分布の特殊な場合であり，適当なベキ変換によって最終的には直径xのW一分布に還元されてしまう。この例のように，林木の生長を表現するある量（個体重，葉重，エネルギー　等）の中に指数分布に従うものが存在するならば，それとベキ変換の形で関連する諸量はすべてW一分布で表現される。その端的な例が直径分布というわけである。以上のように，W一分布もR一関数と同様“不変性”というモデルの良い特徴を備えている。この点から見る限り，両者は良い“対”（相対性長則やベキ変換を仲人として）をなしているように

思われる。

本節の蛇足を一つ。W－分布の不変性は時間方向の分布の発展に関しても保存されるかも知れない。今，ある量（たとえば直径）が定差図上で$x(t+1)=c+a\cdot x(t)^{b}$の形に表されているとする。変量$x(t+1)$と$x(t)$の間の関係はこのように決定論的には表示できないかも知れぬが，平均的な意味で考えるなら，近似的に成立するであろう。このとき，二時点間でW－分布は保存される。すなわち，定差図上で直線関係になくても，一方がW－分布であれば他方もW－分布となる。

2. モデルの単純さ

モデルとは丸い全体を三角や四角に切ったようなものである。切り方が上手であればそのものの本質を実物以上に生き生きと見せてくれる。それがモデルの骨頂であり，我々モデル作成者（遊び人）の腕のふるいどころである。したがって単純であること，どこをどのように切断したかが明確になっていることの二点がモデルの基本的要件となろう。たとえば，次の二つは古くから存在する簡単なモデルである。

(A) スギ林の蓄積生長量は一定。

(B) スギ林の令級分配は法正林型。

（令級別面積が一定）

もし，当該森林をとりまく諸環境条件が不変でかつその森林の吸収し得る太陽エネルギーの量が無限であれば，林木間の競争もまた老化も生じないであろうから，毎年蓄積は一定量増え続けるであろう。なぜなら，この場合連年生長量に差をつける特別な理由が存在しないからである。林木もしくは林分が生長していく過程はエネルギーが蓄積に転化される過程であるから，エネルギーが無限であれば生長は限りなく続くはずである。しかし現実にはエネルギーが限られているので，早晩吸収したエネルギーが全部蓄積に還元される生長停止の時期がやってくる。この場合には，(A)モデルは生長モデルとして不十分ということになる。他方，(B)のモデルも，伐期が確定していてかつ生長量も一定であれば有効であろう。

以上のように，モデル化は変動する量を一定と割切ることから出発する。どのようなモデルも，変量を一定とする操作をどこかに含んでいる。「比例」とか「線型」という概念は数式モデルにとって必須のものである。それは変量を一定値で置き換える（比例の場合は，係数が一定）思想の端的な例といえよう。このように考えていくと，単純なモデルと複雑なモデルの違いは，その“置き換え”操作が全面的であるか部分的であるかの差である。このことは，ここでくどくどしく言う必要のない程実に当り前のことであるが，意外と看過されているのではなかろうか。

次に．モデルの単純ということについて，対象に関する我々の知識不足という観点から考えてみよう。森林について何も知らない観念論者は，林分の成長や令級分配に関して(A)，(B)モデルを妥当と認めるであろう。そういう意味では，両モデルは“先験的”モデルに近い。この場合，先験もしくは

仮定と結論の間に距離はない。仮定即結果である。したがって，最も貧弱なモデルである。次に，森林についてある程度の知識を持っている人が，

「林分内の生育空間もしくはエネルギー分布はどのような形をしていますか」

という質問を受けたとする。彼はどのように答えるであろうか。筆者などはこの問題に関して白痴に等しいが，この問に答えられないという点からいえば，森林を見たこともない人と同じ立場にある。エネルギー等の量は“見えない量”であり，その分布に至ってはなおさらいわんやである。しかし，次のような想定は可能である。まず第一に，エネルギー総量が無限であればエネルギー分配は一様であり，第二に総量が一定であれば分配は指数型分布になるのではないかと。一様型の分配は対象に関する知識がゼロの場合のこちら側の勝手な推論であり，先験的なものである。これに対して指数型の分配は，エネルギー総量が一定という条件（対象に関する知識）が付加された場合の修正された分配様式と言えよう。さらに知識（条件）が増えればエネルギー分配は指数型からはずれていく。つまり調査等によって森林のエネルギーに関する情報が増加するにつれて，配分モデルは単純な一様型からより複雑な型へと変化していくわけである。これはまた仮定的なものと結論とが知識の増加にともなって離れていく過程ともいえよう。次節のモデルは，先験分布と結論すべき分布との間の距離を土台に，知識（条件）が付加されるにつれて分布がどのように変化していくかを記述するＯＲモデルの例である。

3. 変分型のモデル

求める分布は簡単であればあるほど良いとする我々の立場と，その単純化を拒否しようとする対象側との“かっとう”をＯＲ的に表現すると次のようになる。

$$\int_0^a x^m f(x)\,dx = \mathrm{L} \qquad (1)$$

なる条件のもとで

$$\mathrm{D}(f, g) = \int_0^a f(x)\, ln \frac{f(x)}{g(x)}\, dx \qquad (2)$$

なる汎関数を最小にするように分布$f(x)$を定めること。ただし$f(x)$の積分値は1としておく。

これは典型的な条件付変分問題である。汎関数$\mathrm{D}(f, g)$は二つの分布$f(x)$，$g(x)$の距離を表し，カルバックの判別関数の連続版に相当する。また$g(x)$は，条件式(イ)が存在しない場合の，つまり対象に関する情報が全く存在しない場合の解で，我々にとって先験的に最も確かそうに見える分布のことである。全く情報が存在しないということは，言わば，仮定即結論なのであるから，$f=g$すなわち$\mathrm{D}(f, g)=0$　となるわけである。$\mathrm{D}(f, g)$ を最小にするという数学形式は，なるべ

く単純な分布にしたいという我々の願望を形式的に表現したものと言える。

次に上記の変分問題の解について考えよう。最も簡単な場合は，(1)の条件が存在せずかつ$g(x)=c$（一定）の場合である。この解は

$$F(f)=\int_0^a f(x)\, ln\, f(x)\, dx \qquad (3)$$

を最小にする解と同等で$f(x)$は一様分布である。（3）は負のエントロピーの連続版に相当する。続いて，$m=1$，$g(x)=c$ の場合の解 $f(x)$ は指数型となる。同様に，$m=2$，$g(x)=c$の場合は正規分布型である。このことは，先験的分布として$g(x)=c$（一様分布）を仮定すると，条件式の変化に応じて分布$f(x)$は指数分布，正規分布　等に変化していくことを意味している。さらに，一般に$g(x)=mx^{m-1}$とすると，解は

$$f(x)=\alpha\cdot x^{m-1}\, exp\, (-\beta\cdot x^m)$$

なるWeibul 分布で与えられる。仮に，xを立木の直径とすると，$y=x^m$という量は各立木の生育空間，葉量あるいはエネルギーに比例する量かも知れない。この場合，条件式(1)はそれらの量の期待値もしくは和が一定であることを意味し，そのような条件のもとでD（f，g）を最小にする直径xの分布がW一分布というわけである。

最後にまた蛇足を一つ。全く形式的な推論であるが，上記の $f(x)$ を林分の生長量曲線と“解釈”すると，前節のモデル（A）は最も簡単な“一様生長”の場合に相当し，Mitscherlich式型の生長はそれより一歩進んだ“指数生長”の場合にあたる。$f(x)$ が指数曲線であるときそれを積分した生長曲線は明らかにMitscherlich式型である。この場合，条件式（1）は生長量$f(x)$ で時間xを重みづけした言わば“生長時間”が有限であることを意味している。もしこの“生長時間”が無限であれば（条件式が存在しない），$f(x)$ は一定となり，その結果生長は直線的となる。多分択伐林の蓄積生長はこの例に近いものではなかろうか。分布の場合と同様，適当な条件式を追加するかあるいはベキ変換の形で変量xをyに変換してやると，Richards関数も得られる。

以上は思いつきの形式的分布モデル論である。おそらく筆者のごとき怠け者でなければ，このような中味のないモデル論に想到することはないであろう。知識を得る努力もしないで，何も知らないことを“単純化”という美名のもとに肯定しようとしているのだから。