生長モデルとしてのワイブル分布について

東大農 箕 輪 光 博

1 は じ め に

木梨らは，「林分シミュレーションに対する生長モデルの研究」をまとめるにあたって，次のように述べている(5)。

「今後の課題としては，間伐実施において両方法(筆者注：N・Z・F・P方式と九大方式)の推定がどうなるかについての実験と計算と実測との照合をすすめ，あわせて任意林分のワイブルのパラメーターの推定法とその変化の状態および林分シミュレターとしてのシステムの確立が必要と認められる。」

そこで，本稿では，最初に生長モデルとしてのワイブル分布の若干の性質を述べ，それを基に，パラメーターの決定法やその変化に関する考察を加えることにした。第3節の log-Mitscherlich式は，ワイブル分布と対称的な位置にあり，単木の生長と林分の生長の関係を考える上で有効のように思われる。

2 ワイブル分布と林木の生長

筆者はさきに，本誌5号の「モデル雑感」の中で，ワイブル分布は$Y=AX^{B}$型の変換に対してその形を保存するという好ましい性質を有していることを指摘した(8)。たとえば，林木の個体重が指数分布にしたがうとすると，他の諸量(直径，断面積等)も$Y=AX^{B}$型の変換を通じてワイブル分布で表現される可能性がある。その際，この変換に対する不変性は，時間方向の変換 $X_{t+1}=\alpha+\beta X_{t}^{\gamma}$ に対しても成り立つことを述べておいた。この式は，二時点間のある量(たとえば直径)の生長関係を表わす定差方程式で，一種の生長式と考えることができる。この式の特徴は，単に平均量(直径)だけでなく，個々の値を結びつけている点にある。そういう意味では，単木方向の生長式と言えよう。

最近，R・BAILEY はFor.Sci. 誌上に同一趣旨の詳細な論文を発表した(2)。彼は，ワイブル分布の他に，正規分布，指数分布，ベーター分布，対数正規分布等を，二時点間の変換という立場から考察し，単木レベルの生長式と林分レベルの直径分布との関係を明らかにした。

たとえば，異なる二時点における直径をd，d'とし，両者がワイブル分布にしたがうとすると，

$$d'=\alpha+\beta(d-a)^{\gamma} \qquad \cdots\cdots(1)$$

の関係にある。ここで

$$F(x)=1-\exp\left\{-\left(\frac{d-a}{b}\right)^{c}\right\}$$

$$G(y)=1-\exp\left\{-\left(\frac{d'-a'}{b'}\right)^{c'}\right\}$$

であり，さらにパラメーター(α,β,γ)，(a,b,c)，(a',b',c')の間には

$$a'=\alpha \qquad b'=b^{\gamma}\beta \qquad c'=c/\gamma \qquad \cdots\cdots(2)$$

なる関係のあることが容易に確かめられる。

(2)式は，ワイブル分布のパラメーター（a，b，c）が変換式（生長式）のパラメーター（α，β，γ）を通じて，（a'，b'，c'）に変換されることを表わしている。ここで，a，b，c はそれぞれ位置，尺度，形状パラメーターである。二時点間の生長量 I は，(1)式より

$$I=(\alpha-d)+\beta(d-a)^{\gamma}$$

で与えられる。さらに，BAILEY はパラメータを二つの場合（$a=0$）に限定して

$$d=\theta\cdot\exp(\mu t^{k})$$

型の単木生長式を導いている。

以上からわかるように，BAILEY論文は分布間の変換を論じているに過ぎず，これをもって単木の生長論と言うにはちょっとさみしい気がする。しかし，各時点の直径分布に特定の分布をあてはめることは，二時点間の生長関係に $Y=AX^{B}$ 型の式を想定することに他ならぬことを一般的に指摘した点において多少の意義があると思う。また，後述するように，(1)式と(2)式はワイブルパラメーターの決定法に対して，新たな手がかりを与えてくれる。また，両式は間伐前，間伐直後の分布の関係を考察する上において役に立つ。特に，(2)式のパラメーター c に関する関係式は，間伐による分布の形の変化を論ずるのに便利である。つまり，$\gamma>1$ ならCは減少し，分布は左偏化する。逆に $\gamma<1$ なら c は増加する。$\gamma=1$ のときは，c は不変である。この γ と c の増減関係は，間伐前後の分布の動きだけでなく，間伐後一定期間の分布の変化を考察する上で重要である。後述のごとく，γ は平均直径や直径分散の変化と密接に結びついている。分布のパラメーター（b と c）が，平均直径と分散に関係しているのは当然であるが，実はその間の重要な媒介役をはたしているのが γ という量なのである。これらの点については，第 4 節で詳しく取り扱うことにして，次に，同じ $Y=AX^{B}$ 型の変換に対してその形を保存する log-Mitscherich式について，ワイブル分布との関連において述べたい。

3　log-Mitscherlich 式型生長

対数変換したある量がMitscherlich（以下略してM式）にしたがう場合を考える。つまり

$$\ln X=M(1-L\cdot e^{-kt}) \quad \cdots\cdots(3)$$

微分形で表わすと

$$\frac{1}{X}\cdot\frac{dX}{dt}=MLke^{-kt} \quad \cdots\cdots(4)$$

または，

$$\frac{d}{dt}\ln X=k(M-\ln X) \quad \cdots\cdots(4)'$$

となる。

(3)または(4)式は，Gomperz式と呼ばれているものであるが，ここではこれをlog-Mitscherlich 式

(略して log-M式)と呼ぶことにする。(4)式から分かるように，log-M式の特徴の一つは相対生長率が $exp(-kt)$ に比例して減少することである。

もう一つの特徴は，ワイブル分布と同様 $Y=AX^B$ 型の変換に対してその形を保存することである。この変換は，Yの相対生長率がXのそれのB倍であることを示しており，(4)式からY自体も log-M式にしたがうことは明らかである。すなわち，

$$\ln Y=M'(1-L'\cdot e^{-kt}) \quad \cdots\cdots(5)$$

ここで，

$$M'=MB+\ln A, \quad L'=L\cdot(MB/M') \quad \cdots\cdots(6)$$

である。

(6)式から，変換式に含まれるパラメーターAとBがlog-M式のパラメーターM，Lに対してどのような働きをなすかが分かる。この変換過程で注目すべき点は，(3)と(4)式に含まれるパラメーターkの値は共通であるということである。この性質は，log-M式を用いて林木の生長を解析する上で重要である。というのは，$\ln X$の生長率と残存量($M-\ln X$)の比であり，その意味において生長方程式に個有の量であるからである。この個有の量が，$Y=AX^B$ 型の変換でつながるすべての量に共通であるということは，各量の生長特性を比較したり，パラメーターを決定する上で重要な役割をはたすのであろう。

次に，log-M式に従う例として，ヒルミの「自己間引き(self-thinning)」曲線を取り上げる(3)。林分密度Nに関する原方程式は，

$$\frac{d}{dt}\ln N=\alpha(\ln N_*-\ln N) \quad \cdots\cdots(7)$$

または，

$$N=N_*\left(\frac{N_0}{N_*}\right)^{e^{-\alpha(t-t_0)}}$$

で与えられる。ここで，N_0，N_*はそれぞれ自己間引き過程の始点，終点における初期林分密度，限界林分密度である。自己間引きは林分の閉鎖直後に始まり，林分内の種内競争を通じて進行する。そして一定の林令に達すると，自己間引きの速度はゼロに等しくなり，林分の林分密度は一定値N_*に達するわけである。もちろんその後も本数の減少は起こるが，それは自己間引き以外の原因による。この限界密度N_*は地位に依存し，その値は地位が悪くなるにつれて大きくなる。他方，自己間引き係数と呼ばれるαは，樹種にのみ依存し地位とは独立である。ヒルミは，(7)の微分方程式を二・三の仮定と次元解析の手法に基づいて導いたが，これは明らかに log-M式である。また，自己間引き係数αは先に述べた個有の量k($Y=AX^B$ 型の変換に対して不変であるという意味で)に対応している。ヒルミは，マツとトウヒ林を例にとり，パラメーターN_*とのαの値やその決定法について詳細な分析を行っているが，本稿では上記の基本方程式の紹介だけにとどめ，次に $Y=AN^B$ 型の変換によってヒルミの式がどのように変換されていくかを考察することにしたい。

REINEKE(1933)は，十分な立木度の林分のエーカー当たりの本数を断面積平均直径に対して対数方

眼紙にプロットすると，一般に直線になることを見い出した（9）。つまり，

$$\mathrm{Log}\,N = -1.605\,\log dg + K$$

ここで，Kは樹種によって決まる定数である。

この式は，林令と地位に関係なく，多くの樹種にあてはまるという。さらに，REINEKE 式の一般形

$$\mathrm{Log}\,N = -a\log X + K$$

または，

$$X = K' \cdot N^{-\frac{1}{a}} \quad \cdots\cdots(8)$$

は，林分密度と他の測定値（平均幹材積，単木当たりの葉量等）との間にも成り立つ（12）。

さて，(8)式は明らかに $Y = AX^B$ 型の変換式である。したがって，もしREINEKE 式内の林分密度が，log-M式に従うならば，断面積平均値や平均幹材積も log-M式に従うことになる。問題は，ヒルミ式におけるNとREINEKE 式におけるNとを等置出来るかどうかである。前者は林分が閉鎖した後に自己間引き過程にある林分密度であり，後者は十分な立木度の林分密度，つまり最多密度に近い林分密度である。自己間引きの場合，同種間の競争が激化するにつれていずれは最多密度に達するわけであるから，十分に閉鎖した林分に関しては両者のNの定義はほぼ同じとみてよいであろう。とすると，前述の議論から，林分密度Nも各種変換量Xも同じ log-M式に従うことになる。荒っぽい言い方をすれば，林分密度Nがヒルミの式を満たすならば，平均直径や平均幹積積，単木当たりの葉量等もすべて log-M式に従い，しかも(3)式の係数kはどの式にも共通なのである。筆者が先に指摘したように，ワイブル分布やRichards生長関数も同様の性質を持っていたが（8），上記のkのごとき一定の不変なパラメーターは存在しなかった。その意味では，同じ $Y = AX^B$ 型の変換を基礎としながらも，log-M式の不変性はワイブル分布やRichards 関数のそれよりも徹底していると言えよう。

上記の log-M式論は，自己間引き林分もしくは十分な立木度の林分に関するものであるが，通常の施業がなされている現実の林分に対しても近似的に成り立つであろう。それを調べるには，たとえば平均直径を両対数定差図上にプロットし，直線になるかどうかを確かめる。つまり，

$$\overline{X}_{t+1} = \beta \overline{X}_t^{\gamma} \quad \cdots\cdots(9)$$

が成り立つかどうかを両対数定差図上で調べれば良い。ところで(9)式は，第2節の冒頭に述べたワイブル分布の時間方向の変換式と同じ形をしている。ただし異なる点が二つある。その一つは，(9)式のパラメーター β，γ は時間に対して不変であること，もう一つは(9)式の $\overline{X}$ は平均値であって個々の直径の値ではないということである。これに対して，先に述べたワイブル分布の変換式は二時点（t+1），tを固定した時間断面における個々の直径間の関係を表わすものであり，そのパラメーターは一般に時間断面に依存している。しかし，特殊な場合として，たとえば時間を一定範囲に限定すれば，パラメーターを不変と見なし得るであろう。また，第二の点については，ワイブル分布の変換式に特定の値つまり平均直径を代入したと考えれば，(9)式はワイブル分布の変換式の特別な場合と解釈できよう。

以上のように，log-M式とワイブル分布の間にはいくつかの類似点や相異点がある。両者共，Y＝AX^B 型の変換に対して不変であるという性質を持っているが，当然の事ながら，前者は時間を，後者は空間を相手にするものであるという点において全く異なる。しかし，両者はワイブル分布の時間方向の変換式 $X_{t+1} = \beta X_t^{\gamma}$ を通じて，相接する点を持つとも言えるのである。BAILEYのごとく，この変換式を一種の生長式とみなすことは，まさしく時間と空間，平均と個体の生長を結びつけることを意味する。平均量に生長式をあてはめることは，時間方向の整序であり，他方個別量に分布を想定することは個体の整序である。どちらの方向にも，ランダム性を除去して一定の形式にのせようとする秩序化への志向がある。そうでもしないと，平均と個体を同一形式の下で処理することは不可能である。

4　ワイブル分布のパラメーター決定法

すでに第2節のおわりに指摘した通り，(1)式はワイブル分布のパラメーターを決定する際に大きな役割をはたす。そこで本節では，ワイブル分布のパラメーター（以下パラメーターと略す）の性質や変化を調べたり，あるいはパラメーターを決定する場合に，(1)式がどのような働らきをなすかを説明することにしたい。

ワイブル分布は西沢らが詳しく報告している（10）。d を胸高直径，$x = d - a$ とすれば，ワイブル分布は

$$f(x) = (c/b)(x/b)^{c-1} \quad exp\left\{-(x/b)^c\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

と表わされる。ここで，a，b，c はそれぞれ，位置，尺度，形のパラメータ（母数）である。$x \geqq 0$，$a \geqq 0$，$b > 0$，$c > 0$ で a は最小直径限界とも呼ばれている。この三つのパラメーターの中で c は特に重要である。$c < 1$ は逆J字型分布，$c = 1$ は指数分布，$1 < c < 3.6$ では正の歪みをもち，$c = 3.6$ では正規分布となる。$c > 3.6$ では負の歪みがひどくなり，$c \to \infty$ では単一点上のスパイクとなる。

さらに西沢らは，ワイブルのパラメーターの推定による直径確率分布の予測法を明らかにしている(11)。次にその予測手順を示す。

(1) 平均直径（$\overline{d}$）および断面積平均直径（$\overline{d_b}$）を予測する。

(2) 初期の直径分布の最小直径限界を求める。

以下，次の順序で計算を進める。（ただし $\Gamma k = p(1+k/c)$）

(3) $E(x) = d - a$　　(4) $E(d^2) = d_b^2$

(5) $E(x^2) = d_b^2 - 2aE(x) - a^2$

(6) $E(x^2)/E^2(x) = \Gamma_2/\Gamma_1^2$

(7) 前もって用意された c に応ずる Γ_1，Γ_2，Γ_2/Γ_1^2 の値を見い出し，それぞれに応ずる c の値を求める。

(8) c に応ずる Γ_1 の値を表から求め，$b = E(x)/\Gamma_1$ で b の値を求める。

(9) 求められた a，b，c の値を用いて d に応ずる確率密度を(10)式から計算する。（以下略）

上記の予測法では，まず$\bar{d}$やd_bの予測式を必要とする。さらに，パラメーターcに応ずるΓ_1，Γ_2，Γ_2，Γ_1^2 等の表を必要とする。また，手順(3)，(4)，(5)，(6)，(8)から分かるように，（d，d_b）とパラメーター（a，b，c）の間の関係は複雑であり，$\bar{d}$やd_b の変化に対するbやcの動きを解析的に追うことは困難である。この点，以下に述べるパラメーター決定法は（$\bar{d}$，d_b）もしくは（$\bar{d}$，C_d）と（b，c）の陽表的関係に基づいており，両者の動きを見るに便利であるだけでなく，Γ_k表等を使用しない点においても簡単である。ただし，西沢らの方法と同様，$\bar{d}$やd_b（又はC_d）の予測方法が前提として必要である。

さて，異なる二時点における直径，最小直径をそれぞれ，α，a，α'，a'とすると，これらの量は(1)式を満たす。さらに，$x=d-a$，$x'=d'-a'$ とおけば，(1)式は，簡単に

$$x' = \beta x^{\gamma} \quad \cdots\cdots (11)$$

となる。(1)と(11)式より，次の二つの近似式が得られる。すなわち，

$$\bar{d}'-a'=\beta(\bar{d}-a)^{\gamma}\cdot\lambda \quad \cdots\cdots (12)$$

$$C_{x'} = \frac{\gamma\cdot C_x}{\lambda} \quad \cdots\cdots (13)$$

さらに(13)式は

$$C_x = C_d\cdot\frac{\bar{d}}{\bar{d}-a} = \frac{C_d}{1-w}$$

$$C_{x'} = C_{d'}/(1-w')$$

であることを考慮すると

$$\gamma = (C_{d'}/C_d)(\bar{d}'/\bar{d})\left(\frac{\bar{d}-a}{\bar{d}'-a'}\right)\cdot\lambda$$

$$= (C_{d'}/C_d)\left(\frac{1-w}{1-w'}\right)\cdot\lambda \quad \cdots\cdots (14)$$

とも書ける。ここで

$$\lambda = 1+\frac{1}{2}\gamma(\gamma-1)\cdot C_x^2 \quad \text{（修正係数）}$$

$$w = a/\bar{d},\quad w'=a'/\bar{d}'$$

である。

(12)と(14)式は，パラメーターβ，γの決定に用いることができる。すなわち，二時点間の情報，$C_{d'}$とC_d，$\bar{d}'$と$\bar{d}$，a'とaが与えられると，(14)式からまずγの値が計算される。γの値は通常１前後の値をとるので修正係数λの値は十分１に近い。はじめに，$\lambda=1$として(14)式からγの近似値を求め，次いでその近似値を代入した時のλの値を計算し，それに基づいてはじめのγの値を修正すればほぼ正しいγの値が求まる。(14)式中のw（最小直径と平均直径の比）も重要な量である。東大千葉演習林の固定試験地の資料によれば，林令が３０年生程度に達するとwの値は一定になる傾向があり，大体その値は0.３～0.５の間にある。したがって，もし$w=w'=\mathrm{const}$ なる仮定の下では，γはC_dと$C_{d'}$ だけから定まることになる。他方，

第２節の(2)式によれば $c/c' = \gamma$ であるから，形状パラメーター c と c' の間には，

$$c'/c = (C_d/C_{d'})\left(\frac{1-w'}{1-w}\right)\cdot\frac{1}{\lambda} \quad \cdots\cdots (15)$$

なる関係の存在することが分かる。今仮りに $\lambda \fallingdotseq 1$ とすれば，(15)式は形状パラメーター c が $(1-w')$ に比例して，また変動係数 C_d に逆比例して変化することを示している。さらに $w = \mathrm{const}$ すなわち，最小直径 a が平均直径 $\bar{d}$ に比例して変化する場合には，形状パラメーター c は C_d のみに依存し，両者は $c \cdot C_d = \mathrm{const}$ の関係を保存しながら動く。

他方，(14)式から γ の値が定まると，(12)式から β が

$$\beta = \frac{\bar{d}' - a'}{(\bar{d}-a)^{\gamma}}\cdot\frac{1}{\lambda} \quad \cdots\cdots (16)$$

として定まり，これに(2)式の $b' = b^{\gamma}\beta$ の関係を通用すれば，b と b' の関係

$$b' = \left(\frac{b}{\bar{d}-a}\right)^{\gamma}\cdot\frac{\bar{d}_1 - a'}{\lambda} \quad \cdots\cdots (17)$$

として与えられる。

(15)と(17)式は，パラメーター b と c の漸化式であるから，パラメーターの初期値 $(C_{d_0}, \bar{d}_0, a_0)$ または (C_{d_0}, w_0) が与えられれば，(15)と(17)式をくり返し用いることによって，任意の時点におけるパラメーターの値を決定することができる。もちろんそのためには，各時点における $(C_d, \bar{d}, a)$ または (C_d, w) の推定値が必要である。ここで，パラメーター a だけは，C_d や $\bar{d}$ と同様に何らかの形で外部から与えてやらねばならないことに注意すべきである。たとえば，第 n 時点における形状パラメーター c_n は γ_n を介して次の式で計算される。

$$\begin{aligned} c_n &= c_0 \prod^{n}\left(\frac{1}{\gamma_j}\right) \\ &= \left(\frac{c_0 C_{d_0}}{1-w_0}\right)\cdot\left(\frac{1-w_n}{C_{dn}}\right)\prod^{n}\left(\frac{1}{\lambda_j}\right) \end{aligned}$$

ここで，C_{dn}，w_n，γ_n，λ_n 等は第 n 時点におけるそれぞれの値を示す。同様の式は，尺度パラメーター b_n についても成り立つ（(17)式を用いればよい）。

以上の説明からわかるように，本稿のパラメーター決定法は，次の三つの手順から成る。

(1) データの初期値 $(C_{d_0}, \bar{d}_0 \cdot a_0)$ からパラメーターの初期値 (a_0, b_0, c_0) を定める。

(2) 第 n 時点における $(C_{dn}, \bar{d}_n, a_n)$，または (C_{dn}, w_n) を推定する。

(3) γ_n，β_n を(14)と(16)式から求め，それに基づいて b_n，c_n を計算する。つまり，(15)と(17)式を用いて b_{n-1}，c_{n-1} から b_n，c_n を求める。

第一段の初期決定には，西沢らの方法を用いることができる。最も大切なのは第二段の平均直径や変動

係数，最小直径の推定法である。この点については，西沢，木梨，柿原，長（11，5，4），阿部（1）らによる多くの研究がある。

本パラメーター決定法の特徴は，

(1) 数値表やガンマ関数値を必要としないこと。

(2) 林分の生長と共にパラメーター，特に形状パラメーター c がどのように変化するかが分かること。

(3) 間伐前後の直径分布にワイブル分布をあてはめれば，間伐による c の変化も間伐率や間伐方法（下層，上層，全層）との関連において分析できること。

の三つに要約される。特に，間伐前後の分布の形の変化を考察するには，(14)式が便利である。たとえば，間伐率を $\varDelta N/N=m$，間伐木の平均直径（$\bar{d}''$）と間伐前の平均直径（$\bar{d}$）との比を $\bar{d}''/\bar{d}=P$ とすると，間伐直後の平均直径（$\bar{d}'$），変動係数 $C_{d'}$ は，それぞれ

$$\bar{d}'=\bar{d}\,(1-mP)/(1-m)$$

$$C_{d'}^2=\frac{(1-mP^2)(1-m)}{(1-mP)^2}\,C_d^2-\frac{m(P-1)^2}{(1-mP)^2}$$

で与えられるので，これに間伐による最小直径 a の変化を適当に仮定すれば，(14)式より間伐前後の γ の値を計算することができる。ただし，$C_{d'}$ 式の誘導にあたっては簡単のため，間伐前の C_d と間伐木の $C_{d''}$ を等しいと仮定した。γ の値が分かれば，それと 1 との大小関係によって c の増減が分かる。間伐の仕方を規定しているのは m と P の二つの量であり，これによって $\bar{d}$，C_d，a は大きく変わる。

本パラメーター決定法の適用例については，今春の林学大会で発表する予定である。ここでは紙数の関係で省略する。

5　ワイブル分布の周辺

（5－1）　ワイブルパラメーターの変化

木梨はパラメーターの変化に関する一連の詳細な研究を発表している（6，7）。彼は，特に形状パラメーター c の変化に着目し，年令や間伐との関係を多量のデータに基づいて分析した。それによれば，スギ林の場合，c は年令と共に漸減する傾向があり，それは主に大径木の生長にともなう C_d の増加によるという。さらに，c の増減がどのようにして起こるかを，最小直径 a が動かない場合と，a が動く場合とに大別して考察し，次のような結論を得ている。

1　最小直径 a が固定している場合は C_x は減少し，c は増加の傾向を示す。ヒノキはよくその傾向に従うが，スギは例外が少なくない。

2　a が動くときは，一般に C_x は増大し c は減少する。ヒノキはその傾向が強い。このとき間伐するとスギ，ヒノキとも C_x が減少し c は増加に転ずる。

ここで，C_x は $x=d-a$ の変動係数で，第 4 節の記号を用いれば，$C_x=C_d/(1-w)$ である。さらに木梨は，間伐直前直後と間伐後一定期間に大別して，パラメーターの変化を追っている。

前節の(13)式は，C_xとcの関係を考察するのに便利である。すなわち，(2)式の$c' = c/\gamma$と(13)式から

$$(c/c')(C_x/C_x') = \lambda$$

となって，$\lambda \doteqdot \mathrm{const}(\doteqdot 1)$であるから$C_x$と$c$は逆比例の関係にあることがわかる。上述の木梨の結論は，aが固定している場合は$\bar{d}$が増加するために$w = a/\bar{d}$が減少し，その結果として（$1-w$）の増加率がC_dのそれより上回ったと解釈できる。そのためにC_xが減少しcが増加したわけである。他方，aが動く場合には，$w = a/\bar{d}$がほぼ一定で，C_dの動いた分だけC_xが増加し，cは減少する。このとき間伐するとC_dの減少が（$1-w$）の減少を上回り，その結果としてC_xの減少とcの増加をもたらすと考えることができる。いずれにしても，C_dと（$1-w$），すなわち$w = a/\bar{d}$の関係を追求すればcの変化は分かる。

（5－2） ワイブル分布の解釈

はじめに，樹高yと直径xの間に$y = \beta x^{\gamma}$なる関係を仮定する。話を簡単にするために直径xが，パラメーターが二つの場合（bとc）のワイブル分布に従うとしょう。このとき，樹高yもワイブル分布に従う。今，これを$f(y)$とすると，

$$R(y) = \int_y^{\infty} f(t)\,dt = exp\left[-\int_0^y g(t)dt\right]$$

$$\frac{f(y)\,dy}{R(y)} = g(y)\,dy = \frac{c}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^{c-1} dy$$

となる。ここで，$R(y)$は高さ$y\,m$以上の林木が存在し得る領域，$f(y)dy$は高さがyと$(y+dy)m$の間にある林木の存在領域と解釈できる。つまり，$g(y)\,dy$は現在$y\,m$の林木がその上部に生長できる割合を示している。この$g(y)$は，$c>1$のときは増加関数で，この$g(y)$の値を回転面の大きさとする回転体を考えれば，地上に頂点をおく逆さの円錐体風の立体を想定することができる。$c=3$のときは，回転面が二次であるからまさしく円錐体であり，上に行くほど林木の残存確率が面的に高くなるわけである。他方，$c=2$の場合はその確率が線的に高くなる。逆に$c=4$では三次的に増加するので，上層木の存在確率は高くなるが，一方では下層木の枯死確率が高くなると考えられる。このようにcの増大は競争の激しさを示す。次に樹高分布および直径分布の形状パラメータをそれぞれ，$c(y)$，$c(x)$とすると，両者の間には$c(y) = c(x)/\gamma$なる関係があり，通常$\gamma<1$なので$c(y)>c(x)$となり常に樹高分布の方が右偏化している。たとえば，$\gamma=1/2$とすると，$c(x)=2$のとき$c(y)=4$である。これは生長という点から見た時，上記の意味で樹高方向が直径方向よりきびしいと言えよう。これを変動係数の関係からみると，(13)式より$C_y \doteqdot \gamma C_x$となって，樹高の変動係数は直径のそれのγ倍であり，特に$\gamma=1/2$のときは$C_x \doteqdot 2C_y$となる。この近似式は東大の千葉演習林のスギ林に対してはかなり適合することが分っている。

以上の解釈はこじつけに近いものであるが，樹高と直径生長の違い，さらには分布形，変動の違い等を知る一つの手がかりとなろう。

（5－3） ワイブル分布の誘導

この点について，本誌5号の「モデル雑感」の中で，変分型のモデルが利用できることを指摘しておいた。そこでも（5－2）で述べた $g(y)$ が重要な役割をはたす。たとえば，樹高の場合で言えば，林分全体としての量（葉量etc）に制限がなければ $g(y)$ がそのまま樹高分布となるはずである。しかし，実際は全体量に条件がつくために″最もあり得そうな分布″はワイブルにおちつくのである。汎関数型の目的関数は多項分布として与えられる″分布の尤度″を連続化した形になっている。詳細は紙数の関係で省略するが，この型のモデル誘導は理論的ではないが，実際的と言えよう。

6 おわりに

以上ゴチャゴチャととりとめもないことを書いてきたが，ワイブル分布で林木の生長を扱う場合の参考になれば幸いである。

生長式や分布型に理論的根拠を与えようとする努力は必要であろうが，それには限界のあることも確かである。理論やあてはめの技術は単独にあるわけでなく，森林の調査法や計画法と結びついている。その意味では，今後は調査方法や計画法とタイアップした生長モデルの研究が一層重要となろう。

引用文献

（1） 阿部信行：90回日林論，97～98，1979

（2） BAILEY,R.L.：Forest Sci.26，626～632，1980

（3） ヒルミ：物理生態学序説，98～122，築地書館，東京，1974

（4） 柿原道喜：87回日林論，89～90，1976

（5） 木梨謙吉ら：88回日林論，107～108，1977

（6） 木梨謙吉：89回日林論，59～60，1978

（7） 同　：91回日林論，79～60，1980

（8） 箕輪光博：林統研誌5，37～40，1980

（9） 西沢正久：森林測定，p260，農林出版，1972

（10） 西沢正久ら：日林九支論29，47～48，1976

（11） 同　：87回日林論，87～88，1976

（12） 佐藤大七郎ら：東大演報48，65～95，1955