

差分法による新しい分布密度関数の導出とその応用

大阪市大 理 山 倉 拓 夫

1 はじめに

植物集団の構成個体の重さ、幹直径などの分布に関する知識は、集団の構造や機能を理解し、植物集団のふるまいを定量的に扱う上で有益である。穂積(1967)は、植物個体の大きさ(個体重など)の頻度分布研究の取るべき方向として、分布の成因論、分布の解析論、分布の応用論の3面をあげている。ここでは、この数年間篠崎吉郎と共同研究してきた分布論のうち、解析論と応用論についてその概要を述べる。

2 研究の出発点としてのMNY法

MNY法とは穂積(1967)およびその共同研究者(穂積・篠崎・只木, 1968)によって提唱された分布の解析論に関する一般原則である。今、植物個体の大きさを x 、その分布密度関数を $\phi(x)$ と置く。また x の最大値を x_{max} とする時、 x の大きい方から累積した区間 $[x_{max}, x]$ 内の個体数または順位 $N(x)$ 、 x の区間総和 $Y(x)$ 、区間平均値 $M(x)$ は x を連続とすれば、次のように定義できる。

$$N(x) = \int_x^{x_{max}} \phi(x) dx \quad (1)$$

$$Y(x) = \int_x^{x_{max}} x\phi(x) dx \quad (2)$$

$$M(x) = Y(x)/N(x) \quad (3)$$

変数 N 、 Y 、 M はいずれも x の大きい方から累積して得られた量である。分布関数の誘導にこのような累積値を採用することは、違った関数型に対するデータの適合度の判定が鈍感になるおそれがあるが、他方実測データのばらつきを平滑化する効果が大きい。

このように選び出された5個の変数、 x 、 N 、 Y 、 M 、 $\phi(x)$ の自由度は5である。しかるに、これら相互の間には上記の定義式が3個存在するので、差引自由度は2となる。したがって4変数(x 、 N 、 Y 、 M)の間に何らかの関係がさらにもう1つ成立することがわかれば、自由度は1となって $\phi(x)$ を x の関数として求めることができる。これがMNY法の基本原則である。普通の測定データは x とその順位(x)との2変数構造を持っている。そこへ生態学的に意味の明らかな M 、 Y という量を導入し、4変数にしてその間に何らかの関係を見出す可能性を高くしたのがMNY法の特徴と言える。この方法によって、色々な林分で得られた林木個体重の資料を検討した結果、穂積らは、 $-3/2$ 乗分布、指数分布、特殊ベータ分布、ベータ分布、複合型分布(各種の分布の複合したもの)を得た。(穂積, 1967, 1971, 1974, 1975, 1976; 穂積・篠崎, 1970; 穂積・篠崎・只木, 1968)。この5つの分布型は $\log x \sim \log N$ の間の関係を利用して、グラフ上でその相違を容易に判定できる。また、これらの分布密度関数を応用して集団の機能量の推定も可能になった。

穂積らのMNY法では、 $\varphi(x)$ を求めるのに、累積した変量 M 、 N 、 Y が利用される。この方法は個体数がある程度少ない場合でも有効であるが、個体数が十分多ければ、差分法が利用できるであろう。これによって、おそらく性格のまったく異なった分布関数を導出できる可能性がある。このような考え方に基いて、差分法の利用を検討した。

3 差分法を利用した分布密度関数の導出

3・1 1階の差分を利用する方法

植物個体に、その x の大きさの順に番号をつける。 x の最も大きいものを1番、最も小さいものを N_* 番とする。同じ大きさの個体にも逐次番号をつける。従って総個体数は N_* に等しい。順位 N の個体の大きさ x を $x(N)$ とすれば、 $x(N)$ と N の関係は、模式的には図-1のようにあらわされる。

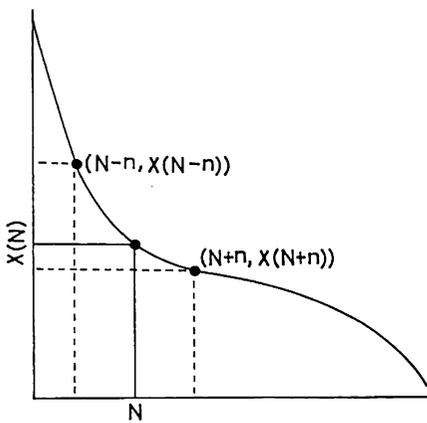


図-1 $x(N) \sim N$ 関係の模式図。 $x(N)$ 、 $x(N+n)$ 、 $x(N-n)$ は変量の大きさを、 N 、 $N+n$ 、 $N-n$ はそれと対応する順位を示す。

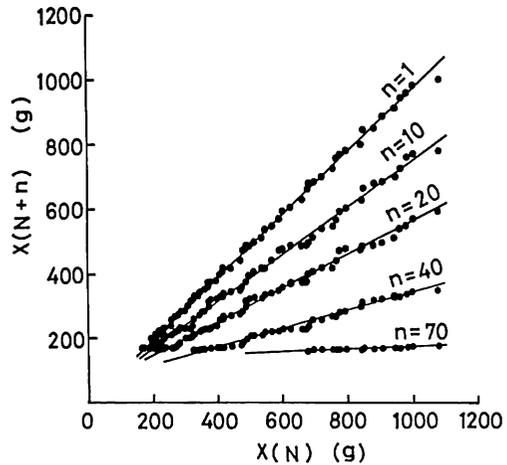


図-2 スギ幼樹林の個体重の $x(N) \sim x(N+n)$ 関係。

今、順位 N 番目の個体と、それから n へだった $N+n$ 番目の個体の x を比較してみる。図-2は苗畑（京都市左京区北白川京大農学部附属演習林内）で育成されたスギでみられた個体重の $x(N+n) \sim x(N)$ 関係である。このような定差図では、しばしば直線関係の成立する場合が認められる。図-2の例では、 $n=1, 10, 20, 40, 70$ の場合、常に直線関係がほぼ成立している。これらの直線は、

$$x(N+n) = ax(N) + b \quad (a \neq 0) \quad (4)$$

であたえられる。 a および b は、 n を指定すれば一定の値を取る。(4)式の一般解には $n \neq 1$ の場合には、ふつう n を周期とする任意周期関数が含まれる。しかるに、図-2の例では n が1, 10, 20, 40, 70の各場合ばかりでなく、図示しなかった $n=2, 3, 5, 7, 11$ の各場合にも直線関係が成立する。すなわち任意周期関数は考える必要はなく、(4)式を解くのが容易になる。この場合、 $n=1$ といても一般性を失

わない。すなわち

$$x(N+1) = ax(N) + b \quad (a \neq 0) \quad (5)$$

(5)式の解は $a \neq 1$ の時,

$$\left. \begin{aligned} x(N) &= C a^N + x_m \\ &= C e^{-\alpha N} + x_m \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ただし,

$$\alpha = -\ln a, \quad a = e^{-\alpha} \quad (7)$$

$$x_m = b / (1 - a) \quad (8)$$

C : 任意定数

また, $a = 1$ の時(5)式の解は,

$$x(N) = x_{max} - \alpha N \quad (9)$$

ただし,

$$\alpha = -b$$

ここでは, N が大きくなる程 x が小さくなるので,

$$\alpha = -b > 0$$

に取っておく。 x と N の関係が(6), (9)式のように求まると, これから x に関する分布密度関数を求めることが可能になる。個体数が充分大きければ, 穂積らが仮定したように x, N を連続とみなすことができ, 連続な x の分布密度関数を求めることができる。

(1)式から, 穂積ら(1968)に基づき,

$$\varphi(x) = -\alpha N / dx \quad (10)$$

(6)式を N で微分して

$$dx/dN = -\alpha C e^{-\alpha N} = -\alpha (x - x_m) \quad (11)$$

(11)式に(10)式を代入して

$$\varphi(x) = \alpha^{-1} (x - x_m)^{-1}$$

この分布密度関数は逆数分布をあらわす。同様にして, (9)式に対応する $\varphi(x)$ は,

$$\varphi(x) = \alpha^{-1} = \text{constant.}$$

この $\varphi(x)$ は良く知られた一様分布を示す。

1階の差分を利用する方法から一様分布と逆数分布が得られた。この分布は, 穂積(1971)の特殊ベータ分布の特例として求めることができる。したがって1階の差分を利用する方法からは, 新しい $\varphi(x)$ は見出せない。

3・2 2階の差分を利用する方法

前節では、1階の定差図で直線になる場合を扱ったが、データを調べるとそうならない方がむしろ多い。たとえば図-3に木頭地方スギ人工林の個体重の例を示す。 $n=10, 20$ では明らかに直線でない。ここで2階の差分を考えてみる。図1の概念図のように、 $x(N+n), x(N), x(N-n)$ を取り、図-4のように

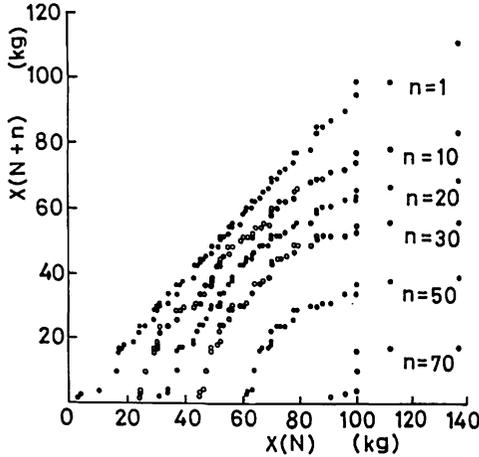


図-3 木頭地方スギ人工林P1(堤, 1969)の個体重の $x(N) \sim x(N+n)$ 関係。

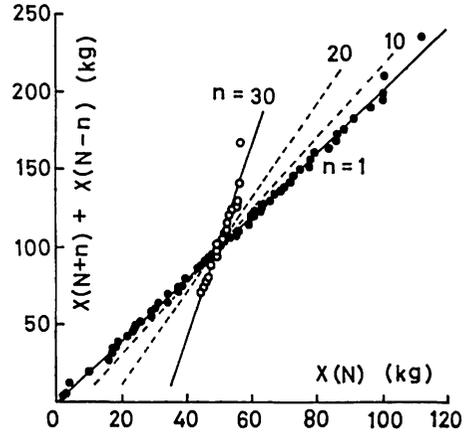


図-4 2階の差分法の利用。データは図3と同じ。

$x(N+n) + x(N-n)$ と $x(N)$ の関係をプロットすると、この場合には、 $n=1, 5, 10, 15, 20$ についてもすべて直線で近似できる。はん雑をさけるため図示しなかったが、 $n=2, 3, 7, 11$ の場合も同様であった。すなわち、

$$x(N+n) + x(N-n) = ax(N) + d \quad (12)$$

ここで n を一定に保てば、 a, d は定数となる。 $n \geq 2$ の場合でもすべて直線関係が成り立つことから、(12)式の解には任意周期関数を考えなくても良い。前節と同様(12)式で $n=1$ とすると、

$$x(N+1) + x(N-1) = ax(N) + d \quad (13)$$

ただし、

$$a \geq 2$$

ここで、 $a > 2$ の時、(13)式の解は、

$$x(N) = C_1 e^{-\alpha N} - C_2 e^{\alpha N} + x_m \quad (14)$$

ただし、

$$\alpha = \ln\{(a + a^2 - 4)/2\} \quad (15)$$

$$x_m = d/(2 - a) \quad (16)$$

C_1, C_2 : 正の任意定数

(14)式に対応する $\varphi(x)$ は、前節と同じ手順から

$$\varphi(x) = \{\alpha^2(x - x_m)^2 + \varphi^2(x_m)\}^{-1/2} \quad (17)$$

ただし，

$$\varphi(x_m) = (2\alpha \sqrt{C_1 C_2})^{-1} \quad (18)$$

(17)式の $\varphi(x)$ は両端の切れた1山型の分布を表わしているが，Pearson VII型分布に形式的に含まれる。そこで，この分布をPearson VII型分布と呼ぶ。

また， $a = 2$ の時，(13)式の解は，

$$x(N) = C_1 + C_2 N + \frac{d}{2} N^2 \quad (19)$$

ここで， C_1, C_2 は任意定数である。対応する $\varphi(x)$ は，

$$\varphi(x) = \{2d(x - x_m)\}^{-1/2} \quad (20)$$

ただし，

$$x_m = C_1 - C_2^2 / (2d) \quad (21)$$

(20)式の $\varphi(x)$ は穂積の特殊ベータ分布に含まれる。

3・3 一般2階差分方程式を利用する方法

前節で使用した2階差分方程式では(12)，(13)式のように $x(N+n)$ と $x(N-n)$ の係数が等しいと仮定した。しかし，もっと一般的な2階差分方程式

$$x(N+n) + ax(N) + bx(N-n) = d \quad (22)$$

を利用することもできる。

(12)，(13)式のように(22)式において $b = 1$ の場合を対称型， $b \neq 1$ の場合を非対称型と呼ぶことにする。非対称型を扱う場合にも，前節の対称型の時と同様 $n = 1$ の場合をはじめに考える。(22)式で $n = 1$ とすれば，

$$x(N+1) + ax(N) + bx(N-1) = d \quad (23)$$

(23)式は一般的に次の解を持つ。

i) $1 + a + b \neq 0$ ， $a^2 > 4b$ の時

$$x(N) = C_1 e^{-\alpha N} - C_2 e^{\beta N} + x_m \quad (24)$$

ただし，

$$\alpha = -\ln\{(-a - \sqrt{a^2 - 4b})/2\}$$

$$\beta = \ln\{(-a + \sqrt{a^2 - 4b})/2\}$$

$$x_m = d / (1 + a + b)$$

C_1, C_2 : 定数

ii) $1 + a + b \neq 0$ ， $a^2 = 4b$ の時

$$x(N) = (C_1 - C_2 N) e^{-\alpha N} + x_m \quad (25)$$

ただし，

$$\alpha = -\ln(-a/2)，a < 0$$

$$x_m = d / (1 + a + b)$$

C_1, C_2 : 定数

iii) $1 + a + b = 0, b \neq 1$ の時

$$x(N) = C_1 + C_2 e^{-\alpha N} - \beta N$$

26

ただし,

$$\alpha = -\ln b$$

$$\beta = -d / (1 - b)$$

C_1, C_2 : 定数

iv) $1 + a + b = 0, b = 1$ の時

$$x(N) = \text{(19)式}$$

24~26式に対応する $\varphi(x)$ の陽関数は不明であるが, $x(N) \sim N$ 関係と $\varphi(x) = (-dx/dN)^{-1}$ 関係から N を消去して $\varphi(x) \sim x$ 関係をシュミレートできる。その詳細は述べないが, 24式はモードに対し非対称な 1 山型の分布を, 25, 26式は極端に歪んだ $\varphi(x)$ を示すことができる。また, Pearson VII 型分布は 24式の特例である。

3・4 高階の差分法の利用と $Y(x), M(x)$ の使用

以上に述べた方法の延長として, さらに高階の差分方程式を利用することが考えられる。階数を高めるとさらに異ったタイプの分布をシュミレートできる可能性が生ずるが, 反面その解析的取扱いが困難になる。また, データを扱う実際的な面からみると, 3階以上の高階差分法の利用は計算に非常な労力を必要とする。そして, 何よりも重要なことは, この研究で扱った多くのデータが, すべて 2階までの差分方程式で十分処理でき, 高階の差分法を利用する必要のあるものはほとんどみあたらなかったという事実である。したがって, 3階以上の高階差分法の利用は, 理論的には可能であるが, 実際上の必要性はうすいと思われる。

また, 今までは $x(N)$ のみを扱ったが (2), (3) 式の $Y(x), M(x)$ も同様に処理できる。 $Y(x), M(x)$ は累積変量であるため, データの平滑化という点ではいちじるしく効果的であるが, 解析的扱いは x よりも困難である。その詳細は略すが, 容易に求められる $\varphi(x)$ は, 今までに述べたものにすべて含まれる。したがって, 現実の分布のほとんどは, 今までに述べた方法による限り, $Y(x)$ や $M(x)$ によらなくても直接 x を用いて処理できる。

4 係数の推定

今までに述べた $x(N) \sim N$ 関係の係数の推定には色々な方法が考えられるが, 今までに試みた手順の 1つを逆数分布を例にとって略記する。そのため, (4) 式の係数を次のように書きかえる。

$$x(N+n) = a_n x(N) + b_n$$

27

この a_n , b_n は最小自乗法で求められる。また, (6)式から,

$$\begin{aligned} x(N+n) &= C a^{N+n} + x_m = a^n C a^N + x_m \\ &= a^n x(N) + (1 - a^n) x_m \end{aligned}$$

この式と 27式から

$$\left. \begin{aligned} a_n &= a^n \\ b_n &= (1 - a^n) x_m \end{aligned} \right\}$$

これから

$$\left. \begin{aligned} a &= \sqrt[n]{a_n} \\ x_m &= b_n / (1 - a_n) \\ \alpha &= -\ln a \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

27, 28式の関係を用いて, 逆数分布の係数, $a(\alpha)$, x_m , C を求めることができる。そのため, まず, 27式から最小自乗法によって a_n を求め, 28式から $\alpha = -\ln a$ で α を計算し, 種々な $n=1, 2, \dots$ の場合の α の平均値をもって, α の推定値とする。この α を(6)式に代入し, $N=1, 2$ の値を推定する。この方法は, 差分法を利用したものであるが, 計算値とデータの比較は $x(N) \sim N$ 関係で行うので, (6)式に直接最小自乗法を適用して係数を求めることもできる。ただし, (6)式は推定すべきパラメーターに関して非線型であるため, 非線型最小自乗法 (Glass, 1967; 永野・吉良, 1978) を用いる必要がある。

今まで述べた $x(N)$ 関係のうち, (9), (19)式は係数に関して線型であるから, 通常の最小自乗法でその係数を求めることができる。他の $x(N) \sim N$ 関係は, すべて非線型の係数を含むが, 関数型が異っても前述の係数推定法と同じ考え方で, その係数を求めることができる。詳細は既報 (山倉・篠崎, 1980) にゆずる。

5 Pearson VII 型分布の性質

今までに得た分布関数の中で, 最も多様な $\varphi(x) \sim x$ 曲線をシュミレートできるものは, 24式である。しかし, この分布関数はその密度関数を変数 x の陽関数で表示できないため, 応用上の制約が大きい。したがって, 取り扱おうとするデータに対し, より簡単な分布密度関数を近似的に適用できる場合には, 強いて24式の分布関数を使用する必要はないであろう。事実, 24式をスギ人工林 (四大学合同調査班, 1966; 堤, 1969) の個体重のデータにあてはめた結果では, 日本各地のスギ人工林の個体重の頻度分布は, Pearson VII 型分布でも近似できる可能性が認められた。そこで, Pearson VII 型分布を実験個体群, 人工林, 天然林から得た植物個体重, 胸高直径などのデータにあてはめ, 集団構成個体の大きさの頻度分布特性について調べた。結果の概要を述べる前に, Pearson VII 型分布の性質を略記する。

Pearson VII 型分布は 14式の分布関数を持ち, その密度関数は 17式で示された。17式は α , x_m , $\varphi(x_m)$ の 3 個の係数を含む。しかし, 両端の切れた分布をあらわすため, x の最大値 x_{max} , 最小値 x_{min} も $\varphi(x) \sim x$ 関係を決定する重要な因子である。ここでは, 次式をもって x_{max} とする。

$$x_{max} = x(N=0) = C_1 - C_2 + x_m$$

29

29式と同じ原則で x_{min} を推定するためには、14式で x の方向を逆転させ、 $N \rightarrow -N$ とし、14式を $x(N) = C_1 e^{\alpha N} - C_2 e^{-\alpha N} + x_m$ と書きあらため、再度係数を推定する必要がある。しかし、この計算は労力を要する割に得るところは少ないので、ここでは x の実測最小値をもって x_{min} と仮定することにする。 $x_{min} \ll 0$ 時には、もちろん $x_{min} \approx 0$ と仮定する。

図-5は α 、 x_m 、 $\phi(x_m)$ 、 x_{max} 、 x_{min} の5個の係数を適当に変化させた時の $\phi(x) \sim x$ 関係の変化を示す。

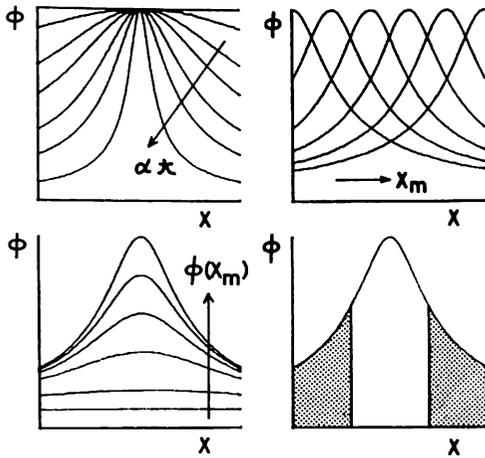


図-5

各係数を変化させた時の Pearson VII 型分布の密度関数の変化。縦軸 ϕ は $\phi(x)$ を、矢印は係数の増大ともなう $\phi \sim x$ 曲線の変化の方向を示す。また、影の部分は両端が極端に切れた場合を示す。

示す。この $\phi(x)$ は極大値 $\phi(x_m)$ を持ち、モード x_m に対し左右対称な性質を持つ。しかし、 $\alpha \ll 0$ 、 $\phi(x_m) \ll 0$ の条件下では一様分布を、 $\phi(x_m) \rightarrow \infty$ の条件下では逆数分布を表わすことができる。また x_m を変化させて、 $\phi(x)$ を x 軸に平行に移動させたり、 x_{max} 、 x_{min} を操作して x の出現範囲を限定したりすれば、いわゆる L 字型分布、J 字型分布をも表現することができる。図-5は、これらの可能性を示している。

17式の $\phi(x)$ は簡単な代数関数の形をしている。このため、平均値や分散などの諸統計量の理論値を x の任意の区間で解析的に計算することができる。また、生態学でも、林学でも、 x と他の変数 y が逆数式 ($y = p/x + q$ 、 $1/y = p/x + q$ など； p 、 q ；定数) で結ばれる場合がしばしば認められる。このような場合、 y の期待値などの理論値を求めるのに、従来の分布関数では解析が容易に求められず、数値計算に頼らざるを得ないことが多かった。17式の $\phi(x)$ は、 x の逆数式で表わされる他の変数の期待値などの計算に際しても、その解析解を初等関数で表示できる利点を持つ。

穂積ら (1968) は、 N や $\phi(x)$ に次元を与えることを提案している。すなわち、土地面積を Q とおいて、 N 、 $\phi(x)$ の次元を、

$$N \equiv [1/Q]$$

$$\phi(x) = [1/\text{kg} \cdot Q], [1/\text{cm} \cdot Q]$$

などと定義する。上の定義で $[Kg]$ や $[cm]$ の次元は取扱う変数 x に由来するものである。このように、

N , $\varphi(x)$ に次元を与えることは、両変数の生物学的意味を明確にし、係数の比較によって $\varphi(x)$ の林分間比較を可能にするばかりでなく、個体数が関係した生物学的現象を解析する際に大きな力を発揮する。本研究でもこれにならい、 N , $\varphi(x)$ に上述の次元を与えることにする。したがって、今までに述べてきた N は、一般的意味における無次元の順位ではなく、調査枠内の順位を示すことになる。 N , $\varphi(x)$ の次元に対応して、 $x(N) \sim N$ 関係、 $\varphi(x)$ の係数はすべて次元を持つ。

6 Pearson VII型分布のデータへのあてはめ

集団構成個体の平均重、平均胸高直径などに関しては、 $3/2$ 乗則（依田ら、1963）、Reineke（1933）の式をはじめ、いくつかの法則性が知られている。これらの法則性と対応する分布関数の形を把握することができるならば、法則性の理解と応用をさらに深めることができよう。このような考え方から、色々な植物群落から得た個体重、胸高直径、樹高のデータに、Pearson VII型分布をあてはめ、その頻度分布の性質を調べた。取りあげた集団レベルの法則性と対応するデータは次の通りである。

1) 平均個体重 \bar{x} と立木密度 ρ の関係としての $3/2$ 乗則（依田ら、1963； $\bar{x} \propto \rho^{-3/2}$ ）。四大学合同調査班（1966）のスギ人工林のデータ。

2) 平均個体重 \bar{x} と ρ の関係としての只木の式（只木、1963； $\bar{x} = A/\rho - B$ ； A, B , 定数）。堤（1969）による木頭地方スギ人工林のデータおよび四大学合同調査班（1964）による信州地方カラマツ人工林のデータ。

3) 平均個体重 \bar{x} と ρ の関係としての密度効果の逆数式（篠崎・吉良、1956； $1/\bar{x} = A\rho + B$ ； A, B , 定数）。只木・武本（1956）のスギ苗の密度効果実験およびアカマルハツカダイコンの密度効果実験（大阪市大生物学実験、1976）のデータ。

4) 平均個体重 \bar{x} と硫安施用濃度 f の間に認められる植物生長の好適曲線としての両性要因の逆数式（穂積・篠崎・吉良、1960； $1/\bar{x} = A_1/f + A_2f + B$ ； A_1, A_2, B , 定数）。アカマルハツカダイコンの栽培実験のデータ（大阪市大生物学実験、1979）。

5) 平均胸高直径 \bar{x} と ρ の関係としての $1/2$ 乗則、またはReineke（1933）の式（ $\bar{x} \propto \rho^{-1/2}$, $\bar{x} \propto \rho^{-h}$ ； h , 定数）。データは1)と同じ。

6) 林木平均樹高 \bar{x} と ρ の関係としての $1/2$ 乗則（ $\bar{x} \propto \rho^{-1/2}$ ）。林業試験場（1961）による関東地方ヒノキ林分収獲表説明書の付表4（胸高直径対樹高相関表）に記載のデータ。

資料林分数は1)～6)のデータの順にそれぞれ、87, 36, 13, 19, 87, 100林分であった。また、これに対応するPearson VII型分布のあてはめ可能林分数は、65, 36, 13, 19, 83, 88林分であった。したがって変数 x の次元、データの精度などを無視して要約すれば、総数342のデータのうちその約9割にPearson VII型分布を適用できたことになる。

以上のPearson VII型分布のデータへのあてはめを通じて得られた結論は、平均値の法則に対応した変量の頻度分布の規則性であったが、Pearson VII型分布の係数の性質をもって要約すれば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} x_m &\propto x_{max} \propto \bar{x} \\ x_{min} &\propto \bar{x} \quad \text{or} \quad x_{min} \cong 0 \\ \alpha &\propto \rho^{-1} \\ \varphi(x_m) &\propto \varphi/x_m \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

上式は個体重，胸高直径，樹高など，変量の性質が異っても，また変量の平均値の法則性が非常に異っていても，変量の頻度分布が Pearson VII 型分布で近似され，かつ変量の平均値が何らかの法則性に支配される時には普遍的に成り立つ。(30)式の意義を別の形で表わせれば，次のようになる。すなわち，(17)式と(30)式を組み合わせると，

$$\varphi(x)/\varphi(x_m) = \{ k(x/x_{max} - k_m)^2 + 1 \}^{-1/2} \quad (31)$$

ただし，

k, k_m ; \bar{x} の法則ごとに定まる定数。

上式は， $\varphi(x)$ ， x をそれぞれ $\varphi(x_m)$ ， x_{max} で除して規格化すれば，1つの \bar{x} の法則性に支配されている多くの植物集団の x の頻度分布は，只1つの規格化された分布密度関数に要約されることを示す。そして \bar{x} の法則性の相違は k, k_m の違いで表わされる。このことを基礎にすれば，以下のような事項を検討できる。

7 Pearson VII 型分布の諸問題の考察への応用

(30)式の Pearson VII 型分布の係数の性質を利用してこれまでに考察した問題とその考察結果の主なものとは次の3つである。

7・1 個体の性質の集団の属性への統合

前の Pearson VII 型分布のデータへのあてはめの所で述べた変量の平均値の法則性は，集団を構成する各個体の性質を直接表わしているものではなく，いわば各個体の性質を統合した結果表われてきた集団の属性として認識される。このように考えると，個体の性質と集団の性質の対応関係に対する疑問が生ずる。この疑問に対して得られた1つの解は次のようなものであった。すなわち，(14)，(17)，(30)式から，

$$x(N) = (e^{-kN/\rho} + Ae^{kN/\rho} + B) \bar{x}$$

ただし，

k, k, A, B ; \bar{x} の法則ごとに定まる数。

上式は個体の大きさが総個体数 ρ と \bar{x} に依存する形式を示す。この形式を利用して， \bar{x} の法則性を満たす $x(N)$ の生長軌跡の考察や，只木・四手井(1963)らをはじめ多くの研究者の指摘している「1林分から得られる主間伐合計量は植栽密度，間伐開始の遅束，間伐年数の長短，主伐密度の差にかかわらずほぼ一定となる。」傾向などに対し理論的見通を与えることが可能になった。

7・2 胸高直径の頻度分布を基本にした3/2乗則系の構成

3/2乗則が成立する場合、とくに森林群落では、それにもなっていくつかの特色ある現象が認められ、その基本的現象は次の4法則で表わされる。

i) 胸高断面積合計は一定、ii) 平均胸高直径は ρ の1/2乗に反比例する。iii) 平均樹高は ρ の1/2乗に反比例する。iv) 平均個体重は ρ の3/2に反比例する。

上の4つの現象、およびそこから導出される諸関係を一括して、3/2乗則系と呼ぶ。この3/2乗則系の構成にかかわる4法則間の有機的つながりは、次の条件から厳密に説明できる。

1) 胸高直径 x の頻度分布はPearson VII型分布に従う。

2) Pearson VII型分布の係数は30式の諸関係を満たす。

3) x と樹高 H の関係は逆数式 $1/H = p/x + q$ で近似され、かつ定数 p は ρ 方向で一定、 q は ρ の平方根に反比例する。

4) 個体重 w は $x^2 H$ の一次式 $w = ax^2 H + b$ で近似され、かつ定数 a は ρ に無関係で一定、 b は ρ^3 に反比例する。

上の4条件は、いずれも実測データから帰納的に結びついたものである。ここで注目すべき点は、従来多くの研究者が3/2乗則系の構成を説明するため採用してきた、樹形についての「相似形の仮定」(依田, 1956)を含まないことである。したがって、「相似形の仮定」は、3/2乗則系の構成を容易に説明するための便利な作業仮説ではありえても、決して必須のものではない。

以上の考察の結果、3/2乗則系を満たす胸高直径の頻度分布を想定することができ、そこからただちに人工林の林分密度管理のための1つのモデルが得られる。今までに提出された3/2乗則を基礎とする立木密度管理モデルでは、主として平均個体重(あるいはそれと同じ意味を持つ平均幹材積)が使われており、いわば平均値レベルでの管理モデルであった。それに対し、ここで得られるモデルは、個体レベルの、しかも個体重(幹材積)よりも測定しやすい胸高直径の法則性を利用している点に特色がある。

7・3 森林の階層構造の解析

32式の対称型差分方程式を用いて、複層林の樹高の頻度分布を調べた。天然林の林分から得た樹高のデータを用いて対称型差分関数 $(x(N+n) + x(N-n) \sim x(N))$ 上で調べると、1林分をいくつかの部分集団に区分できる場合が多かった。この部分集団は、森林の断面図から判定した森林の階層によく対応することが明らかにされた。したがって、樹高に関する対称型差分関数を用いて、森林の階層構造を解析することが可能になった。

対称型差分関数を用いて区分した各階層の平均樹高 \bar{x}_i (i は階層番号を示す)とそれに対応する層密度 ρ_i の間に、林型のいかんを問わず次の関係が存在することが発見された。

$$\bar{x}_i \propto \rho_i^{-1/2}$$

この関係は、単層林分の樹高に関する法則と同じ形式であることから、樹高に関する擬1/2乗則と命名する。同様な法則は、各層の平均胸高直径 \bar{D}_i 、各層の平均個体重 \bar{w}_i と ρ_i の間にも見出され、次式で近似された。

$$\bar{D}_i \propto \rho_i^{-1/2}, \bar{w}_i \propto \rho_i^{-3/2}$$

この \bar{x}_i 、 \bar{D}_i 、 \bar{w}_i 、 ρ_i の間の関係は、その形式が3/2乗則系とまったく同じであるから、ここでは4変量間の関係およびそこから導出される諸関係を一括して擬3/2乗則系と呼ぶ。この系は、まだ多くの問題点を残してはいるが、今後の森林群集の研究において大きな手がかりを与えるものと思われる。

8 おわりに

以上が筆者がこの数年間行ってきた植物の個体重・直径・樹高などの頻度分布に関する研究の成果の要約である。記述に説明不足の部分が多いが、詳細は学会誌を通じて発表する予定である。

最後に、本研究会誌に投稿できる機会を与えて下さいました、箕輪光博博士、小林正吾博士をはじめ、会員の皆様方に感謝致します。

引用文献

- Glass, N. R. : Ecol. 48, 1010-1013, 1967
- 穂積和夫 : 森林の一次生産測定法の研究中間報告 (吉良竜夫編), 90~94, JIBP-PT-F, 大阪, 1967
- 同 : 日生態会誌 21, 152~167, 1971
- 同 : 日生態会誌 24, 207~212, 1974
- 同 : 日生態会誌 25, 123~131, 1975
- 同 : 生理生態 17, 583~586, 1976
- 穂積和夫・篠崎吉郎 : 日生態会誌 20, 1~9, 1970
- 穂積和夫・篠崎吉郎・吉良竜夫 : 生理生態 9, 57~69, 1960
- 穂積和夫・篠崎吉郎・只木良也 : 日生態会誌 18, 10~20, 1968
- 永野正弘・吉良竜夫 : JIBP Synthesis 18 (吉良竜夫・小野勇一・細川隆英編), 69~82, 東大出版会, 東京, 1978
- Reineke, L. H. : J. Agr. Res. 46, 627~638, 1933
- 林業試験場 : 収穫表調整業務資料第27号, 148~252, 林業試験場, 東京, 1961
- 篠崎吉郎・吉良竜夫 : J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. D7, 35~72, 1956
- 只木良也 : 林試報 154, 1~19, 1963
- 只木良也・四手井綱英 : 京大演報 34, 1~31, 1962

只木良也・武本信夫：苗木の生長に及ぼす仕立密度の影響について，京大農林学工論文，1956

堤 利夫：木頭の林業発展と日野家の林業（四手井綱英・半田良一編），340～427，農林出版，東京
1969

山倉拓夫・篠崎吉郎：日生態会誌 30, 307～321, 1980

依田恭二・吉良竜夫・小川房人・穂積和夫：J. Biol. Osaka City Univ. 14, 107～129.

四大学合同調査班：森林の生産力に関する研究Ⅱ，P3+60，日本林業技術協会，東京，1964

四大学合同調査班：同Ⅲ，P1+63，同，1966