林統研誌 8'83

27～36

ワイブル分布の拡張について

東京農工大学 農　上 野　洋二郎

1 はじめに

林分構造を明らかにする一つの指標としての直径分布に種々の確率密度関数をあてはめようとする研究は以前から行なわれてきているが，最近は特にワイブル分布を中心にした研究が多くなってきた。

このワイブル分布は周知のようにSwedenのWeibull(7)によって導入された連続型確率変数の確率分布であり，従来から部品・装置等の信頼性の分野に利用されている分布である。このような分布になぜ直径分布が良くあてはまるかについての素朴な疑問は今後解明されなければならない問題ではあるが，この分布が林業・林学において実用上かなりの長所を持っていることは柿原(2)，箕輪(3)等が指摘しているところであり，今後重要視していかねばならない分布の一つであろう。ところで，筆者は信頼性の分野における理論からワイブル分布を誘導する過程を勉強する中で，この分布が理論的に正しく導かれた分布であるにしても，少々部分的に欠ける所があることに気づいた。そこで，この欠点を補完した場合，この分布はいかなるパラメーターを持った分布となるのか，そしてそのパラメータの推定はどのように決定したらよいのかを考察した。

2 信頼性の理論からのワイブル分布の誘導

これについては脇本(6)がかなり詳細に述べているので，これに沿って説明してみよう。

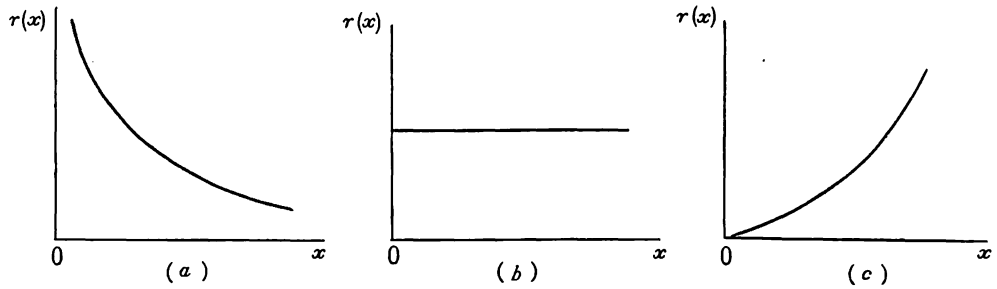
ある製品を使い始めて故障するまでの時間をXとする。このXは製品によって様々であるから，Xはある確率分布に従っていると考えられる。そうすると，Xは確率変数であって分布関数を$F(x)$，その確率密度関数を$f(x)$とすると，$F(x)$と$f(x)$との間には次の関係がなりたつ。

$$F(x)=\int_0^x f(x)\,dx \qquad \frac{dF(x)}{dx}=f(x) \qquad (x\geqq 0)$$

次に，ある時点xで微小な単位時間内に故障するもの($f(x)$)と，その時点で残っているもの($1-F(x)$)との比，すなわち$r(x)$

$$r(x)=\frac{f(x)}{1-F(x)}$$

を考える。信頼性理論ではこれを故障率と呼んでいる(4)。この$r(x)$は時間の変化に対応して図－1に示すように3つの型すなわち初期故障型(a)と偶発故障型(b)及び摩耗故障型(c)に分けられるという。



図－1

さて，この $r(x)$ に次の形すなわち

$$r(x)=\frac{f(x)}{1-F(x)}=\frac{\frac{dF(x)}{dx}}{1-F(x)}=ax^b \qquad (a>0,\ b\neq-1) \tag{1}$$

なる関係があるとして，この微分方程式を解くと

$$1-F(x)=C_0e^{-\left\{\frac{a}{b+1}\right\}x^{b+1}}$$

となる。分布関数の性質から $F(0)=0$ より $C_0=1$ となり，分布関数 $F(x)$ は

$$F(x)=1-e^{-\left\{\frac{a}{b+1}\right\}x^{b+1}} \tag{2}$$

となる。さらに(2)式を微分すれば確率密度関数 $f(x)$ が得られるから

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=ax^be^{-\left\{\frac{a}{b+1}\right\}x^{b+1}} \tag{3}$$

となる。ここで，$b+1=P$，$a=P\theta^{-P}$（$\theta>0$）とおくと，(3)式は

$$f(x)=\left(\frac{P}{\theta}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{P-1}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^P} \tag{4}$$

となり，さらにこの式に位置のパラメータを入れれば，我々が林学上で用いているワイブル分布と同じになる。ここで，θ，P はそれぞれ尺度，形状のパラメータとよんでいるものである。

ところで，$b+1=P$ で，$a=P\theta^{-1}$（$\theta>0$）とおくと(3)式は

$$f(x)=\left(\frac{P}{\theta}\right)x^{P-1}e^{-\left(\frac{x^P}{\theta}\right)} \tag{5}$$

となる。この式は筆者の知る限りではWeibull が提案している式と性質的に同じであり，信頼性の分野ではこの式が用いられているようである（4）。(4)，(5)両式は一見同じように見えるが，最尤法によるパラメータの推定においては相異なった方法となるので注意を要する（後述）。ところで，この $f(x)$ は $\int_0^\infty f(x)\,dx=1$ にならなければ確率密度関数とは言えない。その為には明らかに $b+1=P>0$ でなければならないことは(3)式を積分すればわかるであろう。

ところで，脇本（6）が述べたのと同様に $r(x)$ を P と θ で表わすと，(4)式の場合では

$$r(x)=\frac{f(x)}{1-F(x)}=\left(\frac{P}{\theta}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{P-1}$$

となり，(5)式の場合は

$$r(x)=\left(\frac{P}{\theta}\right)x^{P-1}$$

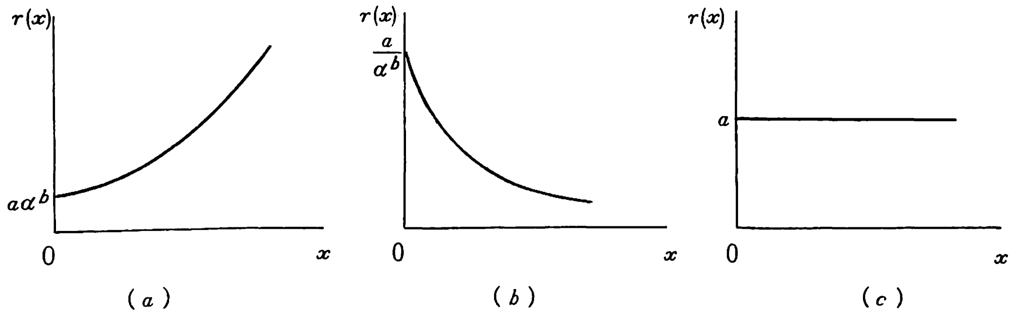
となる。両式とも $P>1$ の時が図－1では（c）の場合，$P=1$ では $r(x)=\frac{1}{\theta}$ となり図－1では（b）に当り，$0<P<1$ の場合は（a）に当ることがわかるであろう。しかしながら，$0<P<1$ の場合を良く検討してみるに，x が0に近づくにつれ $r(x)$ は段々と無限に大きくなることが考えられる。とすると，ワイブル分布においては減少型の場合，時間 x が0に近ければ近いほど $r(x)$ が無限大になることを条件づけており，（c）の場合においても x が0の時，$r(x)$ が必ず0になることを条件づけていることになる。となれば，この分布は $r(x)$ が以上のような動きをする場合においては理論的に適用することが可能であるが，そのような動きをしない場合すなわち $r(x)$ が単調に増加あるいは減少する場合において，$x=0$ の時 $r(x)$ がある有限の値をもつ場合においては理論的に不可能となる。それならばこれを可能にさせるような分布を見い出すことはできないであろうか。そのことを次にのべてみよう。

3　拡張ワイブル分布の誘導

まず，筆者はその分布を導くモデル式として次式を考えた。

$$r(x)=\frac{f(x)}{1-F(x)}=a(x+\alpha)^{b} \qquad (a>0,\ \alpha\geqq 0) \tag{6}$$

この式は α，$b>0$ で $x=0$ の時，$r(0)=a\alpha^{b}$ となって図－2の（a）に示すような型となり，$\alpha>0$，$b<0$ で $x=0$ の時は $r(0)=\frac{a}{\alpha^{b}}$ となって（b）に示すような型となる。また，$\alpha>0$，$b=0$ で $x=0$ の時は $r(0)=a$ であり，その場合は（c）のような型をとる。



図－2

勿論，(6)式は$\alpha=0$とおけば(1)式に帰着するのであり，このαを新たに設けることによってワイブル分布のモデルよりもさらに融通のきくモデルと考えたのである。

さて，(6)式は(1)式と同様に微分方程式であるが，$b\neq-1$の場合次式

$$1-F(x)=C_1 e^{-\left\{\frac{a}{b+1}\right\}(x+\alpha)^{b+1}}$$

が得られる。分布関数の性質より$F(0)=0$であるから $C_1=e^{\frac{a\alpha^{b+1}}{b+1}}$ となり，分布関数$F(x)$として

$$F(x)=1-e^{\left(\frac{a}{b+1}\right)\left\{\alpha^{b+1}-(x+\alpha)^{b+1}\right\}} \tag{7}$$

が得られる。これをxで微分して確率密度関数$f(x)$を求めてみるに

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=a(x+\alpha)^{b}e^{\left(\frac{a}{b+1}\right)\left\{\alpha^{b+1}-(x+\alpha)^{b+1}\right\}} \tag{8}$$

となる。ところで，この$f(x)$が確率密度関数であるためには$\int_0^\infty f(x)\,dx$は1でなければならないので(8)式の$b+1$は正でなければならないことはこの式を0から無限大まで積分する過程で明らかであろう。

次に，$b=-1$の場合は

$$1-F(x)=C_2(x+\alpha)^{-a}$$

となり，分布関数の性質より$F(0)=0$であるから$\alpha>0$とすると，$C_2=\alpha^{a}$となり，分布関数$F(x)$として，$F(x)=1-\alpha^{a}(x+a)^{-a}$ が得られる。

これをxで微分して$f(x)$を求めてみるに

$$f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=a\alpha^{a}(x+a)^{-a-1}$$

となる。この$f(x)$は$\int_0^\infty f(x)\,dx=1$となるので，$b=-1$の場合の確率密度関数であるが，その時$\alpha>0$という条件がつくことに注意しなければならない。

さて，(8)式において$b+1=P\ (>0)$，$a=P\theta^{-P}(\theta>0)$とおくと

$$f(x)=\left(\frac{P}{\theta}\right)\left(\frac{x+\alpha}{\theta}\right)^{P-1}e^{\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^{P}-\left(\frac{x+\alpha}{\theta}\right)^{P}} \tag{9}$$

となる。(9)式において$\alpha=0$とおくと

$$f(x)=\left(\frac{P}{\theta}\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{P-1}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{P}}$$

となり，前述したワイブル分布の式(4)式と同じになる。一方，$b+1=P\ (>0)$，$a=P\theta^{-1}(\theta>0)$とおくと，(8)式は

$$f(x)=\left(\frac{P}{\theta}\right)(x+\alpha)^{P+1}e^{\frac{1}{\theta}\left\{\alpha^{P}-(x+\alpha)^{P}\right\}} \tag{10}$$

となり，ここで$\alpha=0$とおくと，

$$f(x)=\left(\frac{P}{\theta}\right)x^{P-1}e^{-\left(\frac{x^P}{\theta}\right)}$$

となり，(5)式と同じになる。

以上のように，(9),(10)両式は一応ワイブル分布型であるが，新たに設けたパラメータ α を適当に動かすことによってワイブル分布そのものを含めた種々の分布をつくり出す可能性を秘めていると考えられる。以後，この分布を拡張ワイブル分布と名付けることにする。

4　拡張ワイブル分布におけるパラメータの推定

分布のあてはめにおけるパラメータの推定には積率法による場合と最尤法による場合の二つがあるが，ここではまず積率法による場合から話を進めていこう。

i）積率法によるパラメータの推定

確率変数Xが(9)式に示されるような確率密度関数 $f(x)$ を持つと仮定すると，r 次のモーメント $E(X^r)$ は

$$E(X^r)=\int_0^{\infty}x^r\left(\frac{P}{\theta}\right)\left(\frac{x+\alpha}{\theta}\right)^{P-1}e^{\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^P-\left(\frac{x+\alpha}{\theta}\right)^P}dx \qquad (P>0,\ \alpha\geqq 0)$$

である。

ここで，　$t=-\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^P+\left(\frac{x+\alpha}{\theta}\right)^P$ とおくと，

$$E(X^r)=\int_0^{\infty}\left[\theta\left\{\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^P+t\right\}^{\frac{1}{P}}-\alpha\right]^r e^{-t}\,dt \tag{11}$$

となる。ここで，$r=1$ とすると

$$E(X)=\theta\int_0^{\infty}\left\{\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^P+t\right\}^{\frac{1}{P}}e^{-t}\,dt-\alpha$$

となり

さらに，$Z=\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^P+t$ とおくと

$$E(X)=\theta e^{\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^P}\int_{\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^P}^{\infty}Z^{\frac{1}{P}}e^{-Z}\,dZ-\alpha \tag{12}$$

となり，確率変数Xの母平均は不完全ガンマ関数型をもった式となる。一方，$r=2$ とすると，

$$E(X^2)=\int_0^{\infty}\left[\theta\left\{\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^P+t\right\}^{\frac{1}{P}}-\alpha\right]^2 e^{-t}\,dt$$

$$=\theta^2\int_0^{\infty}\left\{\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^P+t\right\}^{\frac{2}{P}}e^{-t}\,dt-2\alpha\theta\int_0^{\infty}\left\{\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^P+t\right\}^{\frac{1}{P}}e^{-t}\,dt+\alpha^2$$

となり，$Z=(\frac{\alpha}{\theta})^P+t$ とおくと，

$$E(X^2)=\theta^2 e^{(\frac{\alpha}{\theta})^P}\int_{(\frac{\alpha}{\theta})^P}^{\infty} Z^{\frac{2}{P}} e^{-Z} dZ-2\alpha\theta e^{(\frac{\alpha}{\theta})^P}\int_{(\frac{\alpha}{\theta})^P}^{\infty} Z^{\frac{1}{P}} e^{-Z} dZ+\alpha^2$$

となる。故にXの母分散 $Var(X)$ は

$$Var(X)=\theta^2 e^{(\frac{\alpha}{\theta})^P}\int_{(\frac{\alpha}{\theta})^P}^{\infty} Z^{\frac{2}{P}} e^{-Z} dZ-2\alpha\theta e^{(\frac{\alpha}{\theta})^P}\int_{(\frac{\alpha}{\theta})^P}^{\infty} Z^{\frac{1}{P}} e^{-Z} dZ+\alpha^2$$

$$-\{\theta e^{(\frac{\alpha}{\theta})^P}\int_{(\frac{\alpha}{\theta})^P}^{\infty} Z^{\frac{1}{P}} e^{-Z} dZ\}^2+2\alpha\theta e^{(\frac{\alpha}{\theta})^P}\int_{(\frac{\alpha}{\theta})^P}^{\infty} Z^{\frac{1}{P}} e^{-Z} dZ-\alpha^2$$

$$=\theta^2 e^{(\frac{\alpha}{\theta})^P}\int_{(\frac{\alpha}{\theta})^P}^{\infty} Z^{\frac{2}{P}} e^{-Z} dZ-\theta^2 e^{(\frac{\alpha}{\theta})^{2P}}\{\int_{(\frac{\alpha}{\theta})^P}^{\infty} Z^{\frac{1}{P}} e^{-Z} dZ\}^2 \tag{13}$$

となり，これも不完全ガンマ関数型をもった式となる。

ところで，(12)，(13)両式において $\alpha=0$ とすると $E(X)$，$Var(X)$ はそれぞれ

$$E(X)=\theta\int_0^{\infty} Z^{\frac{1}{P}} e^{-Z} dZ=\theta\Gamma(\frac{1}{P}+1) \tag{14}$$

$$Var(X)=\theta^2\int_0^{\infty} Z^{\frac{2}{P}} e^{-Z} dZ-\theta^2\{\int_0^{\infty} Z^{\frac{1}{P}} e^{-Z} dZ\}^2=\theta^2\left[\Gamma(\frac{2}{P}+1)-\{\Gamma(\frac{1}{P}+1)\}^2\right] \tag{15}$$

となり，両式はそれぞれ(4)式なるワイブル分布の母平均母分散の式である。また，その変動係数(C.V.)は

$$C.V.=\sqrt{Var(X)}\Big/E(X)=\sqrt{\Gamma(\frac{2}{P}+1)-\{\Gamma(\frac{1}{P}+1)\}^2}\Big/\Gamma(\frac{1}{P}+1) \tag{16}$$

となる。(16)式から標本のC.V.に見合うような P をガンマ関数表から見つければ，前記(4)式の形状パラメータ P を見い出すことができるのであり，そしてこの P から(14)式の関係によって尺度パラメータ θ を推定することができるのである。ところが，(9)式をもつような確率変数Xについては(12)，(13)両式から判断するにそのパラメータを見い出すのは不可能に近いと言わざるを得ない。何故なら，両式共その中に不完全ガンマ関数を含んでいるからである。このことは(10)式をもつような確率変数Xについても同様なことが言えるのである。以上のことから，(9)，(10)両式の確率密度関数をもつ分布すなわち拡張ワイブル分布は実際の種々の分布に対して柔軟的に適応できると考えられるが，そのパラメータを積率法によって求めるには不可能に近いと言わざるを得ないであろう。それでは最尤法による場合はどうであろうか，そのことを次に述べてみよう。

ii）最尤法によるパラメータの推定

今，(9)式なる母集団分布から独立に n 個の標本値 x_1，x_2 ………，x_n が得られたとしよう。その時，この標本の尤度 $L(x_1, x_2\cdots\cdots, x_n\ \theta, P, \alpha)$ は

$$L(x_1, x_2\cdots\cdots x_n; \theta, P, \alpha)=\prod_{i=1}^{n}(\frac{P}{\theta})(\frac{x_i+\alpha}{\theta})^{P-1}e^{(\frac{\alpha}{\theta})^P-(\frac{x_i+\alpha}{\theta})^P} \tag{17}$$

となる。(17)式の両辺に対数をとれば，

$$\ell n L = n \ell n\left(\frac{P}{\theta}\right) + (P-1)\sum_{i=1}^{n} \ell n(x_i + \alpha) - n(P-1)\ell_n \theta + n\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^P - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i+\alpha}{\theta}\right)^P$$

となり，最尤法の定義から(18)式を P ，θ ，α で偏微分して０とおくと

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \ell n L}{\partial P} = \frac{n}{P} + \sum_{i=1}^{n} \ell n(x_i+\alpha) - n\ell n\,\theta + n\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^P \ell n\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i+\alpha}{\theta}\right)^P \ell n\left(\frac{x_i+\alpha}{\theta}\right) = 0 && (19)\\
&\frac{\partial \ell n L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} - \frac{n(P-1)}{\theta} - \frac{Pn\alpha^P}{\theta^{P+1}} + \frac{P\sum_{i=1}^{n}(x_i+\alpha)^P}{\theta^{P+1}} = 0 && (20)\\
&\frac{\partial \ell n L}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n}\frac{P-1}{x_i+\alpha} + \frac{nP\alpha^{P-1}}{\theta^P} - \frac{P}{\theta}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i+\alpha}{\theta}\right)^{P-1} = 0 && (21)
\end{aligned}\right.$$

の連立方程式が得られる。

一方，(10)式からなる母集団分布の場合，その尤度 $L(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n ; \theta, P, \alpha)$ は

$$L(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n ; \theta, P, \alpha) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{P}{\theta}\right)(x_i+\alpha)^{P-1} e^{\frac{1}{\theta}\{\alpha^P - (x_i+\alpha)^P\}} \tag{22}$$

であり，両辺に対数をとると(22)式は

$$\ell n L = n\ell n\left(\frac{P}{\theta}\right) + (P-1)\sum_{i=1}^{n}\ell n(x_i+\alpha) + \frac{n\alpha^P}{\theta} - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i+\alpha)^P \tag{23}$$

となる。前述したのと同様に(23)式を P ，θ ，α で偏微分して０とおくと

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \ell_n L}{\partial P} = \frac{n}{P} + \sum_{i=1}^{n}\ell_n(x_i+\alpha) + \frac{n}{\theta}\alpha^P \ell n\,\alpha - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i+\alpha)^P \ell n(x_i+\alpha) = 0 && (24)\\
&\frac{\partial \ell_n L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} - \frac{n\alpha^P}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i+\alpha)^P = 0 && (25)\\
&\frac{\partial \ell_n L}{\partial \alpha} = (P-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i+\alpha} + \frac{nP}{\theta}\alpha^{P-1} - \frac{P}{\theta}\sum_{i=1}^{n}(x_i+\alpha)^{P-1} = 0 && (26)
\end{aligned}\right.$$

の連立方程式が得られる。これにより(9)，(10)両式をもつ拡張ワイブル分布のパラメータの推定については上記の二つの連立方程式を解けばそれぞれ求めることができるが，それらはほとんど不可能に近いと言わざるを得ない。

このことは，(9)，(10)式なる拡張ワイブル分布において最尤法によるパラメータの推定が困難であることを示しているに他ならない。

ところで，(17)式において $\alpha = 0$ とおくとこれは(4)式なる母集団分布の尤度となるから，その場合(20)式は $\dfrac{nP}{\theta} = \dfrac{P\sum_{i=1}^{n} x_i^P}{\theta^{P+1}}$ となり，故に

$$\theta = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^P}{n}\right)^{\frac{1}{P}} \tag{27}$$

となる。また(19)式は

$$\frac{n}{P}+\sum_{i=1}^{n} l_n x_i-n l_n \theta-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^P l n\left(\frac{x_i}{\theta}\right)=0$$ となるから，この式に(27)式を代入すると，

$$\frac{n}{P}-\frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i^P l n x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^P}+\sum_{i=1}^{n} l_n x_i=0 \tag{28}$$

となる。

(27)，(28)両式はThoman等(5)の述べた式と同じであり，(4)式をもつワイブル分布に対して最尤法からそのパラメータを求める場合には(28)式を満たすような形で反復計算によって形状パラメータPを求めることができると考えられる。一度Pが求まればθは(27)式の関係から求めることができると考えられる。同様なことが(22)式についても言える。すなわちこの式において$\alpha=0$とおくと，これは(5)式なる母集団分布の尤度となるから，その場合(25)式は $\frac{n}{\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^P}{\theta^2}$ となり，故に

$$\theta=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^P}{n} \tag{29}$$

となる。

また，(24)式は

$$\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i^P l_n x_i=\frac{n}{P}+\sum_{i=1}^{n} l_n x_i$$ となるから，この式に(29)式を代入すると

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^P l_n x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^P}-\frac{1}{P}=\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} l_n x_i \tag{30}$$

となる。(29)，(30)両式はCohen(1)の出した式と同じであり，これも(30)式を満たすような形で反復計算によってPを求めることができると考えられる。そして，(29)式の関係からPよりθを求めることが可能であると考えられる。以上のことから，(4)式または(5)式をもつワイブル分布のパラメータの推定については両者とも最尤法によっても求めることができるが，2で述べたようにその推定式は相異なるので注意をしなければならないであろう。

さて，ここでの議論は$\alpha=0$とおいた場合におけるものであった。一方，αが未知数の場合は前記連立方程式のどちらかを解かなければパラメータを見い出すことができないが，その場合はほとんど不可能であることを前にのべておいた。しかしながら，もしαが経験的にある一つの値α_0をもつことがわかっている分布の場合は最尤法からパラメータを推定することは可能である。すなわち，あてはめようとする分布を(9)式とすれば，その式は

$$f(x)=\left(\frac{P}{\theta}\right)\left(\frac{x+\alpha_0}{\theta}\right)^{P-1} e^{\left(\frac{\alpha_0}{\theta}\right)^P-\left(\frac{x+\alpha_0}{\theta}\right)^P} \tag{31}$$

となる。この場合の最尤法による尤度方程式は以下の通りとなる。

$$
\begin{cases}
\frac{n}{P}+\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i+\alpha_0)-n\ln\theta+n\left(\frac{\alpha_0}{\theta}\right)^P \ln\left(\frac{\alpha_0}{\theta}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i+\alpha_0}{\theta}\right)^P \ln\left(\frac{x_i+\alpha_0}{\theta}\right)=0 & (32) \\
-\frac{nP}{\theta}-\frac{Pn\alpha_0^P}{\theta^{P+1}}+\frac{P\sum_{i=1}^{n}(x_i+\alpha_0)^P}{\theta^{P+1}}=0 & (33)
\end{cases}
$$

但し，n：標本数，x_i：標本値

(33)式より

$$
\theta=\left[\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i+\alpha_0)^P-n\alpha_0^P\right\}\right]^{\frac{1}{P}} \tag{34}
$$

となり、この式を(32)式に代入すると

$$
\frac{n}{P}+\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i+\alpha_0)-\frac{n}{P}\ln\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i+\alpha_0)^P-n\alpha_0^P}{\theta}\right\}+\frac{n^2\alpha_0^P}{\sum_{i=1}^{n}(x_i+\alpha_0)^P-n\alpha_0^P}\left[\ln\alpha_0-\frac{1}{P}\ln\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i+\alpha_0)^P-n\alpha_0^P}{n}\right\}\right]-\frac{n\sum_{i=1}^{n}(x_i+\alpha_0)^P}{\sum_{i=1}^{n}(x_i+\alpha_0)^P-n\alpha_0^P}\left[\ln(x_i+\alpha_0)-\frac{1}{P}\ln\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i+\alpha_0)^P-n\alpha_0^P}{n}\right\}\right]=0 \tag{35}
$$

となる。

この結果，$\alpha=\alpha_0$ と固定すれば(9)式なる拡張ワイブル分布のパラメーターPはかなり煩雑ではあるが，(35)式を満たすような形で反復計算によって求めることができると考えられる。一度Pが求まれば(34)式の関係からパラメータθを求めることができると考えられる。同様に(10)式なる拡張ワイブル分布のパラメータP，θについても，$\alpha=\alpha_0$ と固定すると次の両式によって求めることができると考えられる。

$$
\begin{cases}
\theta=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i+\alpha_0)^P-n\alpha_0^P}{n} \\
\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i+\alpha_0)^P\ln(x_i+\alpha_0)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i+\alpha_0)^P-n\alpha_0^P}-\frac{1}{P}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i+\alpha_0)+\frac{n\alpha_0^P\ln\alpha_0}{\sum_{i=1}^{n}(x_i+\alpha_0)^P-n\alpha_0^P}
\end{cases}
$$

このように二種類の拡張ワイブル分布のパラメータの推定はαをある値α_0 に固定することによって最尤法から推定することは可能であるが，最大の難点は未知のパラメータαをある値α_0 に固定することと，固定した後の計算がかなり煩雑になることである。しかしながら，前者については希望的観測ではあるが，ある樹種における色々な直径分布をあてはめる中で経験的にαがどの位の範囲であればよくあてはまるのかといった見通しがつきさえすれば，この分布は現実的なものになってくるであろう。後者についてはコンピューターを利用すれば，その煩雑さから解放されることは十分考えられるのである。

おわりに，この研究にあたっていろいろと貴重なご教示を賜った本学一般教育部数学の高橋僴一教授に

厚く御礼を申し上げる。

引 用 文 献

(1) A. C. Cohen : Maximum Likelihood Estimation in the Weibull Distribution Based on Complete and on Censored Sample, Technometrics, vol. 7, No4, 579〜588, 1965

(2) 柿原道喜：ワイブル分布とその応用，林業統計研究会誌，第7号，37〜43，1982

(3) 箕輪光博：生長モデルとしてのワイブル分布について，林業統計研究会誌，第7号，44〜53，1982

(4) 瀧保夫，茅陽一，宮川洋，関根泰次共著：確率統計現象Ⅰ（岩波講座，基礎工学3），108〜114，1972

(5) D. R. Thoman, L. J. Bain, and C. E. Antle : Inferences on the Parameters of the Weibull Distribution, Technometrics, vol. 11, No. 3, 445〜460, 1969

(6) 脇本和昌：確率分布（その5）－ワイブル分布，指数分布，その他－，数学セミナー，5月号，63〜69，1982

(7) W. Weibull : A Statistical Distribution Function of Wide Applicability, Jour. of Appl. Mech., 293〜297, 1951