

ワイブル型生長曲線

名古屋大 農 松 村 直 人
島根大 農 山 本 充 男

1 はじめに

これまで林木の生長現象に比較的よく適合する曲線式として Mitscherlich 式, Logistic 式, Gompertz 式および Richards 式などが報告されている。これらはともに生長速度 ($\frac{dy}{dt}$) に着目して誘導されたものである。それぞれの誘導の基礎となる生長速度に関する仮定は異なっているが、現在の大きさ y の関数であるという点については共通している。すなわち、

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

と書ける。この $f(y)$ をそれぞれ異なった形で定義したものである。つまり、

Mitscherlich 式 : $f(y) = C(A - y)$

Logistic 式 : $f(y) = \frac{C}{A} y(A - y)$

Gompertz 式 : $f(y) = Cy(\ln A - \ln y)$

Richards 式 : $f(y) = \alpha y^m - \beta y$

などである。ところでこの生長速度が単に現在の大きさの関数であるという考え方は、モデルをできるだけ単純化しようとする場合にはいいが、感覚的には理解しにくいところがある。すなわち、同じ y であってもそれまでに要した時間 t に全く無関係であると考えるのは不自然である。時間 t についても生長速度はなんらかの形で依存するのではないだろうか。我々が同じ自動車教習所へ行っても青年なら 30 回も車に乗れば取れるが、高齢者の場合には年齢万円を投資し何十回も乗らねば取れない。つまり現在の時間 (それまで生きてきた) を生長要因として生長速度に反映できないだろうかと考え、小論では、

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y)$$

をワイブル分布の密度関数の形をかり生長曲線式を導いたので報告する。

2 生長曲線式

まずワイブル分布の密度関数について触れる。もともとワイブル分布は部品の寿命分布で用いられてきたものである (2, 3)。すなわち、ランダムさをもって起こる事象 (原因) が起こったとき、寿命のつきる確率 (時間とともに変わる条件付確率) によって部品の寿命が決まるとして導かれている。その条件付

確率が部品の時間（それまで死なずにすんだ時間，つまり年齢）の何乗かに比例するとしたことに相当しており， t^m という項を持っている。小論でもそれにならない，次のような分布から生長曲線式を導いた。

$$f(t) = \begin{cases} \lambda p(t) \exp[-\lambda P(t)] & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$P(t) = \int_0^t p(\tau) d\tau$$

ここで

$$\lambda P(t) = kt^c \tag{1}$$

とすると(1)式は $p(t)$ を次のように選んだことにほかならない。

$$p(t) = \frac{k}{\lambda} t^{c-1}$$

ここに c, λ, k は常数であるから $\frac{kc}{\lambda} \equiv a, c-1 \equiv b$ とおけば

$$P(t) = at^b$$

すなわちこのモデルでも条件付確率 $p(t)$ は，時間 t の b 乗に比例することになる。(1)式を仮定したものがワイブル分布の確率密度関数，

$$f(t) = \begin{cases} kct^{c-1} \exp[-kt^c] & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{2}$$

となり，その分布関数 F は

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau = 1 - \exp[-kt^c] \tag{3}$$

となる。その概略図を図-1に示す。一般に分布関数は t が無限大に近づくと1に近づく。この挙動は時間の経過とともに生長の上限に近づくという生長現象に似ている。また分布関数を微分した確率密度関数というものは，生長現象で見れば生長速度関数に相当すると思われる。小論で生長曲線式を導くのに特にワイブル分布を用いたのは，その密度関数が時間の $c-1$ 乗に比例しており， $0 < c < 1$ では時間が抑制因子として働き， $c=1$ では時間に無関係，

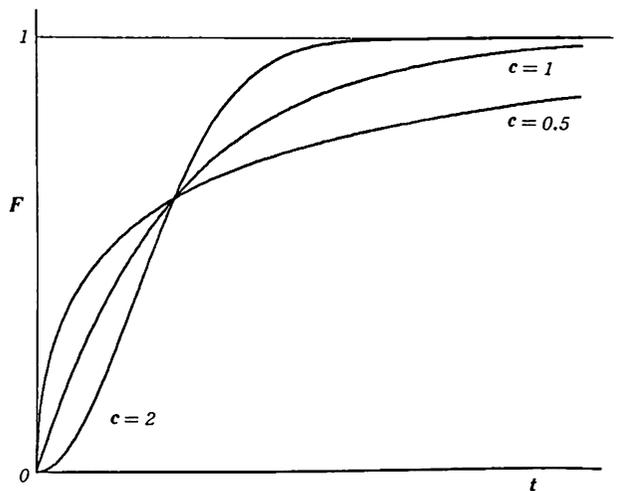


図-1 分布関数 F

$c > 1$ では時間が促進因子となるという柔軟性を持っているからである。分布関数を生長曲線式に変換することは難しくない。その上限値を1から M へと変えるだけである。(3)式を変換すると生長曲線式,

$$y = M (1 - \exp[-kt^c]) \quad t \geq 0 \quad (4)$$

となる。この(4)式を時間 t で微分すると

$$\frac{dy}{dt} = M k c t^{c-1} \exp[-kt^c] \quad (5)$$

$$= k c t^{c-1} (M - y) \quad (6)$$

となり、この式から生長速度 $\frac{dy}{dt}$ が $M - y$ (上限値と現在の値との差) と年齢 t の何乗かに比例していると解釈できる。ここに一つの目標であった時間と大きさとを含む生長速度関数 $f(t, y)$ を導くことができた。次にこの関数が示す形状 (変曲点の有無) について調べる。(5)式をさらに t で微分すると,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) = M k c t^{c-2} \exp[-kt^c] (-k c t^c + c - 1) \quad (7)$$

となる。右辺を0とおけば変曲点の位置がわかる。すなわち,

$$t = \left(1 - \frac{1}{c} \right)^{\frac{1}{c}} \left(\frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{c}}$$

$$y = M \left(1 - \exp \left[\frac{1}{c} - 1 \right] \right)$$

である。 $t \geq 0$ であるので $c < 1$ のときは変曲点がなく、 $c \geq 1$ のとき変曲点は

$$0 \leq y \leq 0.6321M$$

の範囲にある。

ところで(4)式は $c = 1$ のとき Mitscherlich 式(8)に一致する。

$$y = M (1 - \exp[-kt]) \quad (8)$$

次にこの(4)式に jack pine の半径の資料をあてはめてみた。

3 資料およびあてはめ結果

資料には名古屋大学農学部森林経理学教室発行の Growth of even-aged jack pine stands (1) から Horseshoe Lake (以下 H. L. と略記), Cherry Mountain (同 C. M.) の半径実測値を用いた (表-1)。表中 6-32 はプロット番号-資料木番号, () 内は実際に使用した最終半径である。H. L. の2本は100年まで5年おきの半径データ, また C. M. の2本は40年まで2年おきの半径データに対して最小自乗法を用いてあてはめた。このように H. L. についてはほぼ全生長経過, C. M. について

表-1 試料木の年齢と半径

No.	Age	Radius (cm)
H. L. 6-32	100	8.045 (8.045)
H. L. 6-52	103	8.220 (8.098)
C. M. 8-3	105	6.357 (4.027)
C. M. 8-21	106	9.496 (6.791)

は初期の生長経過に対してあてはめを行ったのは、この曲線が生長の全体的把握ならびに微細な変化に対応できるかどうか、および対象とする生長段階の違いに応じて c に差がでるかどうかを調べるためである。図-2~5、表-2にそのあてはめた結果を示

した。残差平方和 (SSD) の値はともに小さくなく、かなりのあてはまりを示していると思われる。この

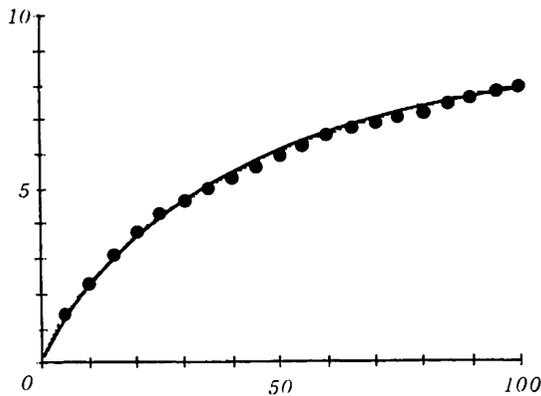


図-2 H. L. 6-32のあてはめ結果

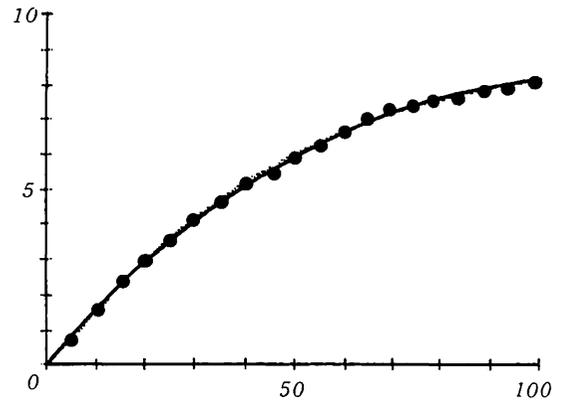


図-3 H. L. 6-52のあてはめ結果

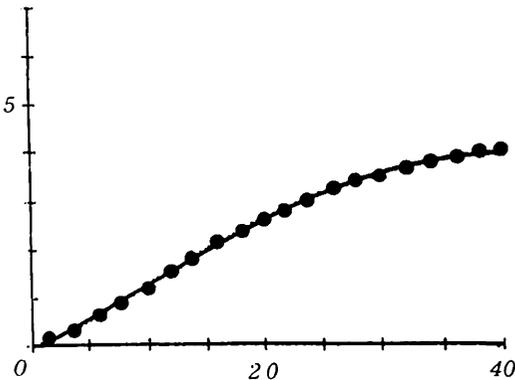


図-4 C. M. 8-3のあてはめ結果

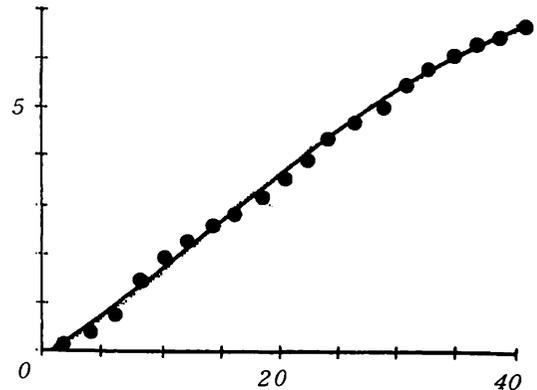


図-5 C. M. 8-21のあてはめ結果

あてはまりの良さはワイブル確率紙上にプロットした点が直線上に並んでいることを見ればわかる (図-6)。

全生長経過に対してあてはめた H. L. の 2 本のうち H. L. 6-32 は c の値が 0.805 (< 1) となり年齢が抑制的に働いていることがわかる。また、H. L. 6-52 は c の値がほぼ 1 であり、特に年齢が

表-2 あてはめ結果

No.	M	k	c	SSD
H. L. 6-32	9.51	0.0433	0.805	0.1976
H. L. 6-52	8.98	0.0147	1.101	0.1754
C. M. 8-3	4.37	0.0115	1.459	0.0299
C. M. 8-21	8.62	0.0083	1.417	0.4666

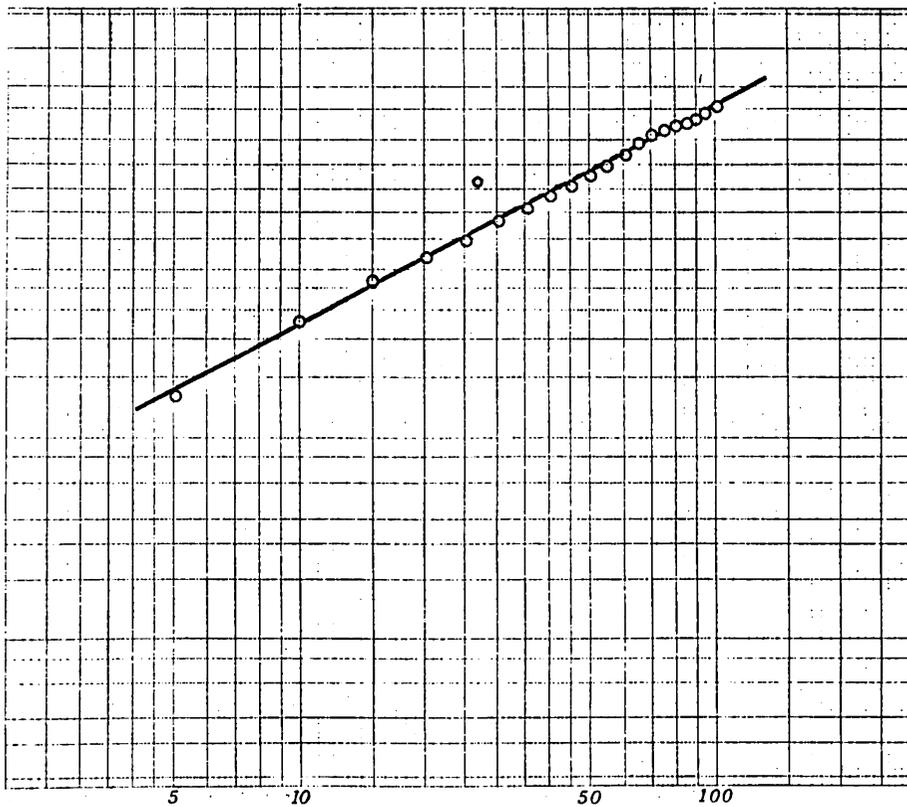


図-6 H. L. 6-52のワイブル確率紙上でのあてはまり

作用していないように思われる。生長初期段階に対してあてはめた C. M. の 2 例とも c の値が 1.4 (> 1) となり、年齢が生長に対し促進的に働いているという結果になった。

4 おわりに

生長速度式に t^{c-1} という項を加えることにより生長速度を現在の値 y と年齢 t の二変数関数として捉えることができた。また(4)式は Mitscherlich 式も含む形となっていることは非常に興味深い。また少例では

あるが、かなりのあてはめ結果が得られたことなどを考えると、今後さらにこの曲線についてその特性、応用性などを吟味することは無意味なことではないと思われる。ワイブル分布で形状母数 c が非常に重要な意味を持っているのと同じようにこの曲線式の c の値も生長に対する年齢の影響を把握するうえで重要な意味を持つ。それゆえ数多くの資料に対しあてはめを行い、種々の生長段階において c の値がどのように変化するかを調べる必要がある。

なお、小論中の計算および図-2~5の原図作成にはYHP 85を使用した。

引用文献

- (1) Nagoya Univ. (Dept. of Forestry): Growth of even-aged jack pine stands, 762 pp, 1979
- (2) 日科技連編：信頼性データの解析，107 pp，日科技連，東京，1976
- (3) 島田正三：信頼性と寿命試験，110 pp，日科技連，東京，1976