林統研誌 8 '83 43〜49

ワイブル分布について

島根大 農 山本充男
名古屋大 農 松村直人

1 はじめに

ワイブル分布はW. Weibullが 'A statistical distribution function of wide applicability' (7)といっているように，広範な応用力をもつ分布であり，工学系の信頼性の分野では寿命分布として，林学では直径分布として，その他各方面で広く応用されている。林学におけるワイブル分布の応用については1982年春の林業統計研究会のシンポジウムでも取り上げられ，本誌7号にその講演内容がまとめてあり，ともにワイブル分布の有用性について指摘している(1，3，5)。実際，ワイブル分布は他の分布に比べて分布の形状が大幅に変化すること，分布の形を変化させ得る分布としては式中にベータ関数やガンマ関数などを含んでいなく取り扱い易いこと，また箕輪氏が指摘しているように，ワイブル分布は相対生長則やベキ変換に対してその形を保存するということ(4) など種々の利点をもち直径などの頻度分布として応用する場合非常に有効である。本論では，ワイブル分布の利点である分布の形状変化について若干の考察を行ったので報告する。尚，計算・作図は名古屋大学型計算機センターを利用して行った。

2 ワイブル分布

ワイブル分布は一般型で表わすと，

分布関数 $$F(x)=1-exP\left[-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c}\right]$$

確率密度関数 $$f(x)=\frac{c}{b}\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1}exP\left[-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c}\right]$$

ただし，$x\geqq a$，$b>0$，$c>0$

と書ける。ここで，aは位置母数，bは尺度母数，cは形状母数と呼ばれている。

次に，ワイブル分布の統計量について述べる。原点まわりの各次モーメントを定義に従って求めると，1次モーメントm_1は，

$$m_1=\int_a^{\infty} x\frac{c}{b}\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1}\ exP\left[-\left(\frac{x-a}{c}\right)^{c}\right]dx$$

で，ここで$\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c}=t$とおけば，

$$x=bt^{\frac{1}{c}}+a,\quad dx=\frac{b}{c}t^{\frac{1}{c}-1}dt$$

となり，これより

$$m_1 = \int_0^{\infty} b t^{\frac{1}{c}} \quad exP〔-t〕dt + \int_0^{\infty} a \quad exP〔-t〕dt$$

$$= b\Gamma(1.+\frac{1}{c}) + a$$

となる。同様に2次，3次，4次モーメントを求めると，

$$m_2 = b^2\Gamma(1+\frac{2}{c}) + 2ab\Gamma(1+\frac{1}{c}) + a^2$$

$$m_3 = b^3\Gamma(1+\frac{3}{c}) + 3ab^2\Gamma(1+\frac{2}{c}) + 3a^2b\Gamma(1+\frac{1}{c}) + a^3$$

$$m_4 = b^4\Gamma(1+\frac{4}{c}) + 4ab^3\Gamma(1+\frac{3}{c}) + 6a^2b^2\Gamma(1+\frac{2}{c}) + 4a^3b\Gamma(1+\frac{1}{c}) + a^4$$

となる。これから平均値まわりの各次モーメントを求めると，

$$\mu_2 = b^2\{\Gamma(1+\frac{2}{c}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{c})\}$$

$$\mu_3 = b^3\{\Gamma(1+\frac{3}{c}) - 3\Gamma(1+\frac{2}{c})\Gamma(1+\frac{1}{c}) + 2\Gamma^3(1+\frac{1}{c})\}$$

$$\mu_4 = b^4\{\Gamma(1+\frac{4}{c}) - 4\Gamma(1+\frac{3}{c})\Gamma(1+\frac{1}{c}) + 6\Gamma(1+\frac{2}{c})\Gamma^2(1+\frac{1}{c}) - 3\Gamma^4(1+\frac{1}{c})\}$$

となる。以上の結果よりワイブル分布の統計量を次のように求めることができる。

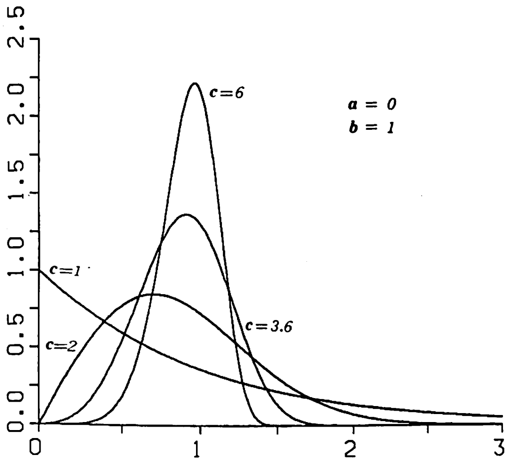
平均 $\fallingdotseq m_1$

分散 $= \mu_2$

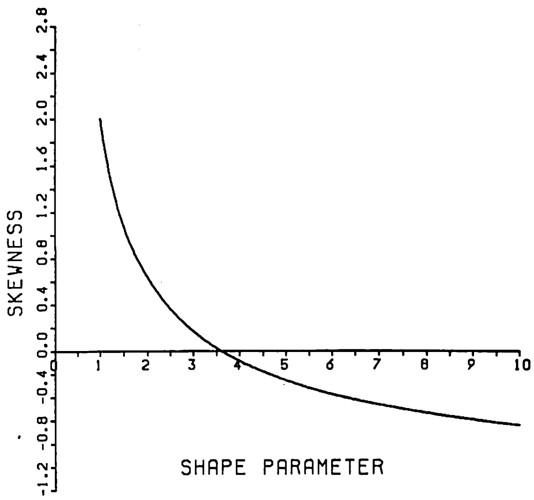
歪度 $= \dfrac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}}$

尖度 $= \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2}$ または $\dfrac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$

歪度，尖度は母数 c のみの関数であり，母数 c はその名の示すとおり分布の形状を支配する母数であることがわかる。図－1に母数 c の値による分布の形状変化について例示する。分布の形状は大幅に変化しているが，これを母数 c と歪度との関係でみると図－2のようになる。$c \fallingdotseq 3.6$ を境に分布の歪度が正から負へと移行しており，ワイブル分布の適応範囲の広さを暗示している。



図－1　母数 c による分布の形状変化



図－2　母数 c と歪度との関係

3　正規分布との比較

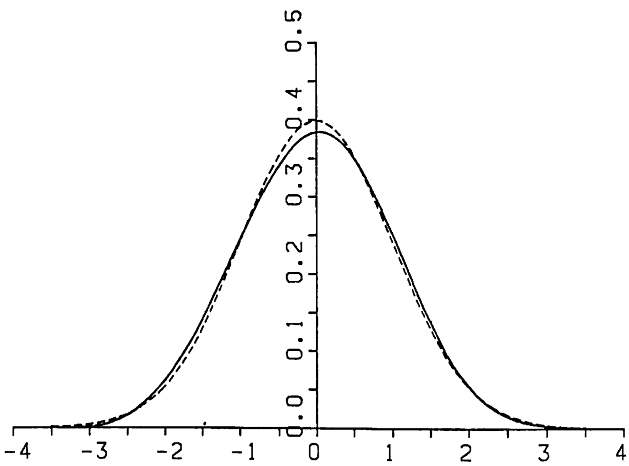
ワイブル分布は上で示したように母数 c の値により種々の歪度を取り得る。例えば $c \doteqdot 3.6$ で歪度は0となる。そこで，同じく歪度0の分布である正規分布とワイブル分布とを比べてみる。その際，ともに平均0，分散1とする。ワイブル分布の三母数の値は前節で示した平均，分散，歪度の式から逆算して求めることができ，ほぼ次のような値になる。

$$a = -3.241$$
$$b = 3.597$$
$$c = 3.60$$

このようにして求めたワイブル分布と正規分布を図示すると図－3のようになる。必ずしもワイブル分布は正規分布とは一致せず，若干ではあるが，正規分布に比べまるみのある分布になっていることがわかる。これを尖度について調べてみる。正規分布の尖度を0とするとワイブル分布のそれは

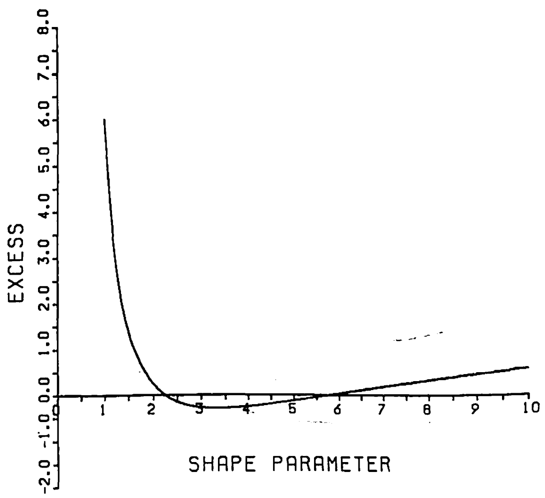
$$\frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

となる。これもまた母数 c のみの関数であるから，尖度と c



図－3　平均0，分散1，歪度0のワイブル分布（実線）と正規分布（破線）

との関係を図示すると図－4のようになる。歪度が0になる$c \fallingdotseq 3.6$では尖度は0とはならず−0.3前後の値になっている。このわずかな違いが実際のあてはめに，どのように現われるかを次節で検討する。



図－4　母数cと尖度との関係

4　あてはめの例

資料

名古屋大学農学部森林経理学研究室が1977年にカナダ・ノーウェスト準州において行ったジャックパイン天然林の調査結果(6)の中から，第4部「直径分布」のCherry Mountain 8の35年の直径分布(Case 1)，同じく85年の直径分布(Case 2)についてあてはめを行った。それぞれの平均その他諸統計量を表－1に示す。

表－1　資料林分の諸統計量

Case	Age (yr.)	Total (trees)	Diameter			
			Mean (cm)	S. D. (cm)	Skewness	Excess
1	35	456	7.63	2.01	0.174	0.258
2	85	457	11.92	2.69	0.431	0.067

あてはめ方法

Cohenの最尤法(2)により母数を推定した。すなわち，ワイブル分布

$$f(x)=\frac{c}{b}\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1}exP\left[-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c}\right]$$

において，$x-a=y$，$b^c=\theta$ とおくと，

$$f(y)=\frac{c}{\theta}y^{c-1}\ exP\left[-\frac{y^c}{\theta}\right]$$

となる。その尤度関数は，

$$L(c,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{c}{\theta}y_i^{c-1}exP\left[-\frac{y_i^c}{\theta}\right]$$

であるから，両辺の対数をとりcおよびθで偏微分すると，

$$\frac{\partial\, \ell nL}{\partial c}=\frac{n}{c}+\sum_{i=1}^{n}\ell ny_i-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}y_i^c\,\ell ny_i$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} y_i^c$$

となる。尤度関数を最大にするには

$$\frac{\partial \ln L}{\partial c} = 0 \ , \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0$$

となればよい。よって

$$\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^c$$

さらに，

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^c \ln y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i^c} - \frac{1}{c} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln y_i = 0$$

となる。これを２分法で c について解き，これにより θ すなわち b を求める。尚，a については 0.1 きざみで変化させ，カイ自乗の値が最小になるように繰り返し計算させた。

あてはめ結果

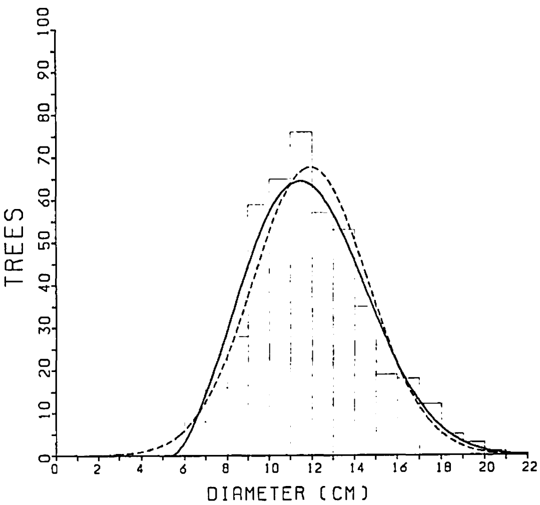
３５年，８５年それぞれの直径分布への正規分布，ワイブル分布のあてはめ結果は表－２・３，図－５・6に示すとおりである。ワイブル分布の母数の値は，

表－２　Case １　あてはめ結果

Diameter (cm)	No. of Stems	Normal Distribution	weibull Distribution
0－　1	1	0.2	0.0
1－　2	2	0.9	0.9
2－　3	2	3.7	5.0
3－　4	5	11.3	14.7
4－　5	23	27.2	30.8
5－　6	58	51.8	51.6
6－　7	88	76.8	71.9
7－　8	91	89.5	83.3
8－　9	83	81.8	79.3
9－10	49	58.7	60.5
10－11	26	33.0	35.9
11－12	19	14.6	15.9
12－13	7	5.0	5.0
13－14	2	1.4	1.0
		0.3	0.2
Chi-square		10.621	20.553
Degrees of freedom		7	6

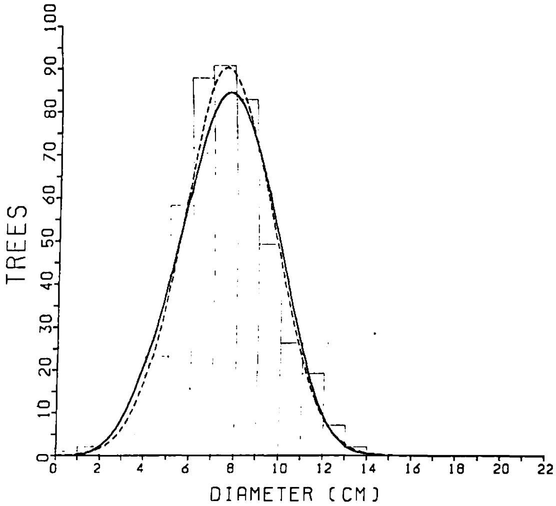
表－３　Case ２　あてはめ結果

Diameter (cm)	No. of Stems	Normal Distribution	Weibull Distribution
5－　6	2	6.3	0.7
6－　7	8	9.0	8.4
7－　8	16	17.7	21.8
8－　9	28	30.3	37.3
9－10	59	45.2	51.3
10－11	65	58.8	61.0
11－12	76	66.7	64.1
12－13	57	66.0	60.4
13－14	53	56.9	51.2
14－15	35	42.7	39.2
15－16	19	28.0	27.1
16－17	18	16.0	16.9
17－18	12	8.0	9.4
18－19	5	3.5	4.7
19－20	3	1.3	2.1
20－21	1	0.4	0.8
-		0.2	0.4
Chi-square		20.042	11.572
Degrees of freedom		11	9



図－5　あてはめ例　Case 1(35年)

実線：ワイブル分布
破線：正規分布



図－6　あてはめ例　Case 2(85年)

実線：ワイブル分布
破線：正規分布

Case 1	$a = 0.4$	Case 2	$a = 5.4$
(35年)	$b = 7.96$	(85年)	$b = 7.32$
	$c = 3.87$		$c = 2.57$

であった。

適合度に関するカイ自乗検定を行うと，有意水準0.01で，正規分布はどちらの場合にも適合するという仮説は棄却されることはなかった。一方，ワイブル分布については，Case 1において棄却された。一見逆のような結果になった。これが前節で指摘した正規分布とワイブル分布とのわずかな違いによるものか，あるいは今回用いたあてはめ方法，資料によるものか，または他の原因によるものかわからない。しかし非常に興味ある結果ではある。

5　おわりに

ワイブル分布は非常に有用な分布であることは多くの認めるところである。実際，本論では触れなかったが，Case 2の適合性からみても十分納得がいく。しかし，現実にあてはめなどを行っていくと，いろいろと理解に苦しむことに出合う。今回その一つである「ワイブル分布と正規分布との関係」について歪度，尖度，あてはめ結果などについて述べた。さらに今後この点について検討を加え，あてはめに対するそれぞれの判定規準などについて調べてみたいと思っている。

引用文献

(1) 阿部信行：森林施業におけるワイブル分布の利用例，林統研誌 7：28－36，1982

(2) Cohen,A. C. ,Jr. : Maximum likelihood estimation in the weibull distribution based on complete and censored samples , Technometrics 13 : 171－182 1965

(3) 柿原道喜：ワイブル分布とその応用，林統研誌 7：37－43，1982

(4) 箕輪光博：モデル雑感，林統研誌 5：37－40，1980

(5) ―――：生長モデルとしてのワイブル分布について，林統研誌 7：44－53，1982

(6) Nagoya Univ.(Dept. of Forestry) : Growth of even-aged jack pine stands , 762 pp , 1979

(7) Weibull , W. : A statistical distribution function of wide applicability , J. Appl. Mech. 18 : 293－297 , 1951